

DLR-IB-AT-KP-2019-68

**Numerische Simulation instationärer,
abgelöster Strömungen im Zeit- und
Frequenzbereich**

Masterarbeit

Nikolas Weis



DLR

**Deutsches Zentrum
für Luft- und Raumfahrt**

Numerische Simulation instationärer, abgelöster Strömungen im Zeit- und Frequenzbereich

Masterarbeit
von
cand. aer. Nikolas Weis

durchgeführt am
Insitut für Aerodynamik und Gasdynamik
der Universität Stuttgart
und am Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt.

Prüfer:
Prof. Dr. rer. nat. Claus-Dieter Munz
Betreuer:
Graham Ashcroft, PhD (DLR)

Stuttgart, im Mai 2019



Masterarbeit für Herrn Nikolas Weis

Numerische Simulation instationärer, abgelöster Strömungen im Zeit- und Frequenzbereich

Die Masterarbeit ist im Rahmen eines Luftfahrtforschungsprojektes angelegt, in dem sich das Institut für Antriebstechnik des DLR mit der numerische Vorhersage von nicht synchronen Schwingungsphänomenen (NSV) in Turbomaschinen befasst. Diese Vibrationen können zuweilen mit kritischen Amplituden in Prüfstandversuchen auftreten und sind auf die Wechselwirkung verschiedener sowohl aerodynamischer als auch aeroelastischer oder aeroakustischer Instabilitäten zurückzuführen. Da sie mit Hilfe der bislang einschlägigen Verfahren nicht vorhergesagt werden können, besteht ein hohes Interesse numerische Verfahren bezüglich Ihrer Wiedergabegüte zu validieren und weiter zu entwickeln.

Im Rahmen der Masterarbeit soll zunächst eine Einarbeitung in das Thema selbst-induzierter Strömungssoszillationen erfolgen. Um den Umgang mit dem hauseigenen Strömungslöser TRACE einzuüben, soll die Umströmung eines Zylinders simuliert werden und mit experimentellen Messdaten aus der Literatur verglichen werden. Folgend soll das Problem mit einem Frequenzbereichsverfahren untersucht, mit den vorherigen Simulationen verglichen und eine Methodik zur Anwendung des Verfahrens entwickelt werden. Im zweiten, komplexeren Testfall soll eine Strömung über eine Kavität untersucht werden, bei der es unter gewissen Bedingungen zu einer Kopplung zwischen Strömungsablösung und reflektierten akustischen Wellen kommt. Erneut ist ein Vergleich mit Daten aus der Literatur und eine vergleichende Simulation mit Frequenzbereichsmethoden geplant.

Prüfer: Prof. Dr. rer. nat. Claus-Dieter Munz
Betreuer: Graham Ashcroft, PhD (DLR)

Ausgabedatum: 19.11.2018
Abgabedatum: 19.05.2019

Prof. Dr. C.-D. Munz

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Masterarbeit selbstständig mit Unterstützung des Betreuers angefertigt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Die Arbeit oder wesentliche Bestandteile davon sind weder an dieser noch an einer anderen Bildungseinrichtung bereits zur Erlangung eines Abschlusses eingereicht worden.

Ich erkläre weiterhin, bei der Erstellung der Arbeit die einschlägigen Bestimmungen zum Urheberrecht fremder Beiträge entsprechend den Regeln guter wissenschaftlicher Praxis¹ eingehalten zu haben. Soweit meine Arbeit fremde Beiträge (z.B. Bilder, Zeichnungen, Textpassagen etc.) enthält, habe ich diese Beiträge als solche gekennzeichnet (Zitat, Quellenangabe) und eventuell erforderlich gewordene Zustimmungen der Urheber zur Nutzung dieser Beiträge in meiner Arbeit eingeholt. Mir ist bekannt, dass ich im Falle einer schuldhaften Verletzung dieser Pflichten die daraus entstehenden Konsequenzen zu tragen habe.

.....

Ort, Datum, Unterschrift

¹Nachzulesen in den DFG-Empfehlungen zur „Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis“ bzw. in der Satzung der Universität Stuttgart zur „Sicherung der Integrität wissenschaftlicher Praxis und zum Umgang mit Fehlverhalten in der Wissenschaft“.

Kurzzusammenfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt die numerische Vorhersage mit dem Strömungslöser TRACE von selbst-erregten Instabilitäten im Kontext von nicht-synchronen Vibrationen in Turbomaschinen. Motiviert durch die Effizienzsteigerung gegenüber Zeitbereichsverfahren, soll die Eignung von Harmonic Balance für diese Phänomene geprüft werden.

Die Tauglichkeit ist fragwürdig, da sich bisherige Anwendungen auf Fälle beschränken, bei denen die Fundamentalfrequenz als essentielle Voraussetzung des Verfahrens vorliegt, wohingegen hier diese Frequenz eine Unbekannte ist.

Dafür werden 2D-Testfälle eines laminar umströmten Zylinders sowie der Überströmung einer Kavität betrachtet. Für den Zylinder stellt sich eine Suchstrategie für die unbekannte Fundamentalfrequenz nach Spiker, [36], als zielführend heraus. Aufbauend darauf gelingt es mit Harmonic Balance verifizierte und validierte Ergebnisse bereitzustellen. Darüber hinaus kann durch breitgefächerte Unsicherheiten in der Fundamentalfrequenz das Verhalten der Frequenzbereichsmethode dazu analysiert und Grenzen der Suchstrategie aufgezeigt werden. Ebenfalls liegen Untersuchungen zum Verhalten der Lösung bei einer variierenden Anzahl von betrachteten Frequenzen vor.

Für die weitaus komplexere Kavität gelingt es mit der Frequenzsuche die physikalische Frequenz zu ermitteln und mit Harmonic Balance erfolgreich das Strömungsphänomen darzustellen. Jedoch offenbart die Validierung Ungenauigkeiten für die Simulation im Zeit- und Frequenzbereich, sodass weiterführende Untersuchungen notwendig sind. Motivation dazu könnte eine überlegene Lösungsqualität von Harmonic Balance sein.

Abstract

The present work deals with self-excited flow instabilities in time and frequency domain by using the flow solver TRACE. In this context, the motivation arises from the increased efficiency of Harmonic Balance compared to time domain methods and the interest of applying the method to non-synchronous vibrations in turbomachinery.

Current utilisations of the frequency domain method are mainly restricted to periodic phenomena, where the fundamental frequency is known. In this context, the main issue for the application of Harmonic Balance to self-excited instabilities is the unknown fundamental frequency. To tackle the problem, a frequency search technique published by Spiker, [36], is used.

At first, Harmonic Balance in combination with this technique is able to compute verified and validated results for the laminar vortex shedding of a cylinder. By considering various uncertainties in the fundamental frequency the behaviour of the frequency domain method therefore is analysed and additionally, the limits of the search technique can be pointed. Lastly, an insight into the influence of a varying number of harmonics is given.

For self-sustaining oscillations in a cavity, Spiker's method succeeds again in predicting the correct fundamental frequency and therefore, Harmonic Balance simulates the flow phenomena properly. However, the validation of the simulation data from the cavity reveals uncertainties for the time and frequency domain method. For this reason, further investigations are necessary, which could be motivated by the successful usage of Harmonic Balance and superior results.

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	xiv
Abbildungsverzeichnis	xix
Tabellenverzeichnis	xxii
1. Einleitung	1
2. Grundlagen	3
2.1. Navier-Stokes Gleichungen	3
2.1.1. Schließungsbedingungen	3
2.2. Turbulenz	5
2.2.1. Grundlagen der Turbulenz	5
2.2.2. Turbulenzbehandlung	6
2.3. Zeitdiskretisierung der Navier-Stokes Gleichungen	11
2.3.1. Räumliche Diskretisierung	11
2.3.2. Nichtlineares Zeitbereichsverfahren	13
2.4. Diskrete Fourier-Transformation	15
2.4.1. Fehlerquellen einer DFT	16
2.5. Nichtlineares Frequenzbereichsverfahren - Harmonic Balance	18
2.5.1. Voraussetzung - Periodizität des Strömungsfeldes	18
2.5.2. Harmonic Balance - Navier-Stokes Gleichungen	20
2.6. Prozesskette	23
3. Laminare Umströmung eines Zylinders	28
3.1. Physikalische Grundlagen und empirische Modelle	28
3.2. Generierung einer Datenbasis mit Zeitbereichssimulationen für Harmonic Balance	31
3.2.1. Numerisches Setup	31
3.2.2. Verifikation	34
3.2.3. Validierung	37
3.3. Untersuchung von Harmonic Balance	41
3.3.1. Numerisches Setup mit Harmonic Balance	41
3.3.2. Einfluss einer Unsicherheit bei der Fundamentalfrequenz	42
3.3.2.1. Modellvorhersage	42
3.3.2.2. Frequenzsuchstrategie	48
3.3.2.3. Künstliche Unsicherheiten	52
3.3.3. Einfluss der Anzahl der betrachteten Harmonischen	58

3.3.4.	Einfluss der Hinzunahme von Nebenharmonischen	60
3.3.5.	Effizienz	61
4.	Selbst-erregte Schwingungen bei Kavitäten	65
4.1.	Physikalische Grundlagen und empirische Modelle	65
4.2.	Simulation einer tiefen Kavität	72
4.2.1.	Numerisches Setup	72
4.2.2.	Simulationsergebnisse	73
4.3.	Simulation einer flachen Kavität	77
4.3.1.	Numerisches Setup	77
4.3.2.	Simulationsergebnisse - Zeitbereichsverfahren	79
4.3.3.	Simulationsergebnisse - Harmonic Balance	84
4.3.4.	Diskussion der Simulationsergebnisse	88
5.	Zusammenfassung	90
	Literaturverzeichnis	92
A.	Anhang	95
A.	Navier-Stokes Gleichungen - Skalare Formulierung	95
B.	Zustandsvektor, Flussvektor, Flussmatrix und Quellterm der Navier-Stokes Gleichungen	100
C.	Nichtlinearität des Residuums bei Harmonic Balance - Burgers Gleichung	102
D.	Numerisches Setup des Zylinders, $Re = 100$	104
E.	Phasenwinkel bei der empirischen Fundamentalfrequenz	106
F.	Konvergenzverläufe bei erhöhter Unsicherheit	107
G.	Numerisches Setup der tiefen Kavität bei $Ma = 0,14$	108
H.	Numerisches Setup der flachen Kavität bei $Ma = 0,26$	110

Nomenklatur

Lateinische Symbole

a	[m/s ²]	Beschleunigung
A, A_p	[m ²]	Fläche, projizierte Fläche
c	[m/s]	Schallgeschwindigkeit
C	[K]	Sutherland-Konstante
C_μ	[–]	Konstante des k - ω -Modells
c_v, c_p	[J/(kg K)]	spezifische isochore und isobare Wärmekapazität
c_L, c_p	[–]	Auftriebs- und Druckbeiwert
D, T, L, B	[m]	Durchmesser, Tiefe, Länge, Breite
e	[J/kg]	spezifische Energie
E	[J]	Energie
f	[1/s]	Frequenz
F^c, F^v, F		konvektiver, viskoser und allgemeiner Fluss
F_L, F_S, F_V	[kg m/s ²]	Auftriebs-, Oberflächen und Volumenkraft
g		beliebiges Zeitsignal
G		beliebiges Fourier-Spektrum
G	[m]	Abstand zweier Passagen
\dot{h}	[kg/s ³]	flächenspezifischer Wärmefluss
H	[–]	Formfaktor
\dot{H}	[J/s]	Wärmefluss
i	[J/kg]	spezifische innere Energie
I		instationäres Residuum
k	[J/kg]	turbulente kinetische Energie
l	[m]	charakteristische Länge
L_T	[m]	turbulentes Längenmaß
m, m_v, m_a	[–]	Rossiter Mode, Anzahl an Wirbeln, Anzahl an akustischen Wellen
Ma	[–]	Mach-Zahl
n_x, n_y, n_z	[–]	kartesische Raummoden
p	[Pa]	Druck

P_n		Passage
Pr, Pr^t	[—]	Prandtl-Zahl, turbulente Prandtl-Zahl
q		konservative Zustandsvariable
R	[J/(kg K)]	Gaskonstante
R		Residuum
Re	[—]	Reynolds-Zahl
S_M, S_E, S		impulsbezogener, energiebezogener und allgemeiner Quellterm
Sr	[—]	Strouhal-Zahl
t	[s]	physikalische Zeit
T	[K]	Temperatur
T	[s]	Periodendauer
T_u	[—]	turbulente Intensität
u, v, w	[m/s]	kartesische Geschwindigkeitskomponenten
u^+	[—]	dimensionslose Geschwindigkeit
u_τ	[m/s]	Schubspannungsgeschwindigkeit
V	[m ³]	Volumen
$\dot{W}, \dot{W}_S, \dot{W}_V$	[J/s]	Arbeit pro Zeit: Gesamt, aus Oberflächen- und Volumenkräften
x, y, z	[m]	kartesische Koordinaten
y^+	[—]	dimensionsloser Wandabstand
y_w	[m]	Wandabstand

Griechische Symbole

α, β	[°]	Winkel der Anströmung
δ	[m]	Grenzschichtdicke
δ^*	[m]	Verdrängungsdicke
ϵ	[m ² /s ³]	turbulente Dissipationsrate
η	[rad]	Phasenverschiebung
θ	[m]	Impulsverlustdicke
κ	[—]	Isentropenexponent
λ	[W/(m K)]	Wärmeleitfähigkeit
$\lambda_a, \lambda_w, \lambda$	[m]	akustische, wirbelbezogene und allgemeine Wellenlänge
μ, μ_0	[Pa s]	kinematische Viskosität, Referenzviskosität des Sutherland Modells
μ^t	[Pa s]	Wirbelviskosität
ξ	[—]	Verhältnis der Geschwindigkeiten der Wirbel zur Anströmung
ρ	[kg/m ³]	Dichte

τ	$[-]$	Pseudozeit
τ, τ_w	$[\text{Pa}]$	Schubspannung, Wandschubspannung
τ^t	$[\text{m}^2/\text{s}^2]$	Reynoldsspannung
Φ		Strömungsgröße
Φ	$[\circ]$	Phasenwinkel
ω	$[1/\text{s}]$	turbulente Frequenz
ω	$[1/\text{s}]$	Wirbelstärke
ω, Ω	$[1/\text{s}]$	Winkelgeschwindigkeit

Sub- und Superskripts

i	Zellindex
k	Index der Harmonischen
n	Superskript für diskrete Zeitpunkte
r	Index für die Zellkanten
RMS	root mean square einer Größe
t	Subskript für totale Größen
x, y, z	kartesische Raumrichtungen
∞	kennzeichnet Zugehörigkeit zur freien Anströmung

Diakritische Zeichen²

$ \phi $	Betrag
$\overline{\phi}$	zeitlicher Mittelwert
ϕ'	Fluktuationsgröße
$\tilde{\phi}$	Favre-Mittelwert
ϕ''	Fluktuationsgröße aus Favre-Zerlegung
$\hat{\phi}$	Fourier-Koeffizient
$\underline{\phi}$	vektorwertige Größe
$\underline{\underline{\phi}}$	matrixwertige Größe

²dabei soll ϕ eine beliebige Größe darstellen

Abkürzungen

CFD	Computational Fluid Dynamics
CFL	Courant-Friedrichs-Lewy-Zahl
CFL3D	Fluid Dynamics Laboratory Three Dimensional
DFT	Diskrete Fourier-Transformation
DG	Discontinuous Galerkin
DLR	Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
DNS	Direct Numerical Simulation
FVM	Finite-Volumen-Methode
GMC	General Mesh Connector
HB	Harmonic Balance
iDFT	inverse Diskrete Fourier-Transformation
ISA	Internationale Standardatmosphäre
KV	Kontrollvolumen
LES	Large Eddy Simulation
MTU	Motoren- und Turbinen-Union
MUSCL	Monotonic Upwind Scheme for Conservation Laws
NASA	National Aeronautics and Space Administration
NSV	Nicht-Synchrone Vibrationen
URANS	Unsteady Reynolds-Averaged Navier-Stokes
PREP	Preprocessing Programm zu TRACE
POST	Postprocessing Programm zu TRACE
PyMesh	Netzgenerator zu TRACE
RANS	Reynolds-Averaged Navier-Stokes
RMS	Root Mean Square
SST	Shear Stress Transport
TRACE	Turbomachinery Research Aerodynamics Computational Environment
TVD	Total Variation Diminishing

Abbildungsverzeichnis

2.1. Logarithmische Darstellung der spektralen Energie unterschiedlicher Wirbelgrößen (reproduziert nach Versteeg, [41]).	6
2.2. Übersicht der unterschiedlichen Klassen der Turbulenzbehandlung mit Modellierungsanteil (schwarze Schraffur) und Simulationsanteil (graue Schraffur).	7
2.3. Messschrieb einer ortsfesten Geschwindigkeitsmessung in einer stationären und turbulenten Strömung	8
2.4. Bevorzugte Einsatzgebiete des k - ϵ - und k - ω -Modells	10
2.5. Nicht periodisches Zeitsignal (links) und Spektrum des selbigen Signal mit unterschiedlicher Ausprägung des spektralen Leckeffekts (rechts).	16
2.6. Schematische Darstellung eines Ausschnitts einer Rotorstufe von einem Triebwerk.	19
2.7. Schematische Darstellung des Vorgehens zur Berechnung des Fourierkoeffizienten des Residuums ausgehend von den Koeffizienten der Erhaltungsgrößen nach McMullen, [23].	21
2.8. Linearen und logarithmischen Modellierung des Geschwindigkeitsprofils bei einer ersten Wandzelle (links) und Graph der beiden Modelle (rechts) mit dimensionslosen Größen für Geschwindigkeit und Wandabstand (reproduziert nach Versteeg, [41]).	25
3.1. 3D-Skizze eines kreisförmigen Zylinders.	28
3.2. Typisches Spektrum einer laminaren Kármánschen Wirbelstraße eines Zylinders (reproduziert nach Karnidakis, [19]).	30
3.3. Rechennetz des Zylinders für die Simulationen im Zeit- und Frequenzbereich.	32
3.4. Zeitschrieb des Auftriebsbeiwerts am Zylinder bei $Re = 100$ (links) und das entsprechende Frequenzspektrum des eingeschwungenen Signals (rechts).	34
3.5. Auftriebsbeiwert als repräsentativer Parameter für die Lösungsqualität bei unterschiedlichen räumlichen und zeitlichen Diskretisierungsleveln.	35
3.6. Einfluss des iterativen Abbruchkriteriums (L_1 -Residuum) auf die Genauigkeit (links) und die Rechenzeit (rechts).	36
3.7. Vergleich der berechneten dimensionslosen Ablösefrequenz (St) mit den Ergebnissen von Williamson und Kociok (links) und Gegenüberstellung des simulierten Auftriebsbeiwerts mit den Daten von Norberg und Kociok (rechts).	37
3.8. Darstellung der Kármánschen Wirbelstraße bei $Re = 100$ mithilfe der Wirbelstärke und Stromlinien für die Simulationen aus dieser Arbeit (oben) und die Ergebnisse von Kociok (unten)	39
3.9. Einfluss der Mach-Zahl auf die Strouhal-Zahl bei der laminaren Umströmung eines Zylinders (reproduziert nach Canuto, [6]).	40

3.10. L_1 -Residuenverlauf bei einer Simulation der Zylinderumströmung mit Harmonic Balance bei der empirisch ermittelten Fundamentalfrequenz.	43
3.11. Visualisierung der Wirbelstraße im Nachlauf des Zylinders aus Harmonic Balance mit einer empirischen Fundamentalfrequenz (oben) und aus dem Zeitbereichsverfahren (unten).	44
3.12. Zeitsignal (links) und Spektrum (rechts) des Auftriebsbeiwerts am Zylinder für eine Simulation im Zeit- und Frequenzbereich.	46
3.13. Darstellung des Phasenwinkels des Fourier-Koeffizienten der Dichte der 1. Harmonischen für Harmonic Balance bei einer empirisch berechneten Fundamentalfrequenz (links) und Frequenzsuchverfahren nach Spiker (rechts).	49
3.14. Wert des L_1 -Residuums der 1. Harmonischen am Ende von Harmonic Balance mit verschiedenen Fundamentalfrequenzen (links) und Phasenwinkel des Fourier-Koeffizienten der Dichte der 1. Harmonischen bei einer Simulation der optimalen Frequenz (rechts).	50
3.15. Auftriebsbeiwerte des Zylinders aus experimentellen Daten von Norberg, dem Zeit- und Frequenzbereichsverfahren mit denen nach Spiker optimierten Fundamentalfrequenzen.	50
3.16. Wert des konstanten L_1 -Residuenlevel zu Simulationsende (links) und RMS des Auftriebsbeiwerts am Zylinder (rechts) jeweils über unterschiedlichen Fundamentalfrequenzen von Harmonic Balance.	52
3.17. Änderung des Phasenwinkels pro Iteration bei unterschiedlichen Fundamentalfrequenzen.	53
3.18. Darstellung der Änderung des Phasenwinkels des Fourier-Koeffizienten der Dichte pro Iteration bei unterschiedlichen Fundamentalfrequenzen von Harmonic Balance. Dabei handelt es sich um die Koeffizienten der 2. Harmonischen.	54
3.19. Simulation bei 60% der optimalen Fundamentalfrequenz: L_1 -Residuenverläufe der Harmonischen (links) und Phasenwinkel des Fourier-Koeffizienten der Dichte der 2. Harmonischen (rechts).	55
3.20. Spektrale Darstellung des Auftriebsbeiwerts zu unterschiedlichen Simulationszeitpunkten.	56
3.21. Auftriebsbeiwert aus Harmonic Balance Simulationen mit variierender Anzahl von Harmonischen.	58
3.22. Darstellung der Differenz aus Zeitbereichsverfahren und Harmonic Balance durch den Betrag des Fourier-Koeffizienten des Drucks der 1. Harmonischen: Links mit $K = 4$ und rechts mit $K = 2$ Harmonischen.	59
3.23. Spektrum aus dem Zeitbereichsverfahren: links mit einer Abtastung der Harmonischen der Fundamentalfrequenz und rechts mit einer Hinzunahme von Nebenharmonischen um f_1	60
3.24. Gesamter Konvergenzverlauf der 0. und 1. Harmonischen bei einer Initialisierung der zeitgemittelten Lösung mit einer konvergierten und einer nicht konvergierten Lösung (links) und Detaildarstellung (rechts).	62
3.25. Gesamter Konvergenzverlauf der 0. und 1. Harmonischen bei einer Initialisierung der höheren Harmonischen mit null und 10^{-5} (links) und Detaildarstellung (rechts).	62

3.26. Relativer Rechenaufwand von Harmonic Balance mit variierender Anzahl von Harmonischen bezogen auf das Zeitbereichsverfahren.	63
4.1. 3D-Skizze einer rechteckigen Kavität mit geometrischen und strömungsmechanischen Größen.	66
4.2. Schematische Darstellung der Stromlinien bei Kavitäten und Druckverteilung am Boden der Kavität für den Typ: offen (a bzw. c) und geschlossen (b bzw. d). . . .	67
4.3. Skizzenhafte Darstellung des Rückkopplungsmechanismus bei einer Kavität.	67
4.4. Rossiters Modell der Kavitätenüberströmung bei $t = 0$ (links) und bei $t = \Delta t$ (rechts). 69	
4.5. Exemplarisches Spektrum einer rechteckigen Kavität mit $L/T = 2,5$ und $Ma = 0,4$ (reproduziert nach Ahuja, [1]).	71
4.6. Zweidimensionale Darstellung der Vernetzung des Rechengebiets im Bereich der Kavität mit $L/T = 0,5$	73
4.7. Grenzschichtprofil der Geschwindigkeit an der Position $x = -35\text{mm}$ vor der Kavität mit $L/T = 0,5$	74
4.8. Zeitlicher Druckverlauf an der Rückwand der Kavität an der Stelle $z = 12,7\text{mm}$. .	75
4.9. Zweidimensionale Darstellung der Vernetzung des Rechengebiets im Bereich der Kavität mit $L/T = 2,5$	78
4.10. Visualisierung der Fluktuationen (bunt) und des zeitlichen Mittelwerts (schwarz) des Grenzschichtprofils der Geschwindigkeit an der Position $x = -3,175\text{mm}$ vor der Kavität.	79
4.11. Zeitgemittelttes Grenzschichtprofil, experimentell ermittelte Grenzschichtdicke von Ahuja (horizontale Linie) und das Kriterium: $u/u_\infty = 0,99$ zur Erkennung dieser Dicke (vertikale Linie).	80
4.12. Visualisierung der Wirbel in der Scherschicht der Kavität mit $L/T = 2,5$ zum Zeitpunkt t_1	81
4.13. Visualisierung der Wirbel in der Scherschicht und des Druckfelds bei einer Kavität zum Zeitpunkt t_1	81
4.14. Visualisierung der Wirbel in der Scherschicht und des Druckfelds bei einer Kavität zum Zeitpunkt t_2	82
4.15. Zeitlicher Druckverlauf (links) von $x/L = 0,5$ am Boden der Kavität und das Spektrum (rechts).	82
4.16. Empirisches Setup: Residuenverlauf der Harmonischen (links) und Phasenwinkel des Fourier-Koeffizienten der Dichte von der 2. Harmonischen (rechts).	84
4.17. Setup entsprechend des Zeitbereichsverfahrens: Residuenverlauf der Harmonischen (links) und Phasenwinkel des Fourier-Koeffizienten der Dichte von der 2. Harmonischen (rechts).	85
4.18. Optimiertes Setup: Residuenverlauf der Harmonischen (links) und Phasenwinkel des Fourier-Koeffizienten der Dichte von der 2. Harmonischen (rechts).	86
4.19. Optimiertes Setup: Zeitlicher Druckverlauf (links) von der Position $x/L = 0,5$ am Boden der Kavität sowie das Spektrum (rechts) dazu.	87
A.1. Ein- und austretende Massenströme an einem Kontrollvolumen.	96
A.2. Kontrollvolumen mit angreifenden Oberflächenkräften in x-Richtung.	97

A.3. Wärmeflüsse für die Oberflächenelemente des Kontrollvolumens.	99
A.4. Verlauf des Phasenwinkels des Fourier-Koeffizienten der Dichte für die 1. Harmonische (oben), die 2. Harmonische (mitte) und die 3. Harmonische (unten).	106
A.5. Konvergenzverlauf der Harmonischen bei Harmonic Balance für eine optimale Fundamentalfrequenz und verschiedene Unsicherheiten in dieser Frequenz. Für eine Abweichung von 25% sei auf einen erweiterten Bereich der Abszisse aufmerksam gemacht.	107
A.6. Vernetzung der Kavität mit $L/T = 0,5$	108
A.7. Rechennetz der flachen Kavität	110

Tabellenverzeichnis

2.1. Fourier-Koeffizienten des Auftriebsbeiwerts der dominanten 1. Harmonischen für unterschiedliche Vorkonditionierungen der DFT.	17
2.2. Darstellung der Prozesskette bei den Simulationen in dieser Arbeit, ausgehend von der Erstellung eines Rechnernetzes bis hin zur Darstellung der Berechnungsdaten .	23
2.3. Übersicht der numerischen Verfahren in TRACE	26
3.1. Auflistung der betrachteten Reynolds-, Mach-Zahlen und der Anströmgeschwindigkeit für die Simulationen des Zylinders.	31
3.2. Auflistung der minimalen und maximalen Relativabweichungen. Bei der Frequenz in Bezug auf die Daten von Williamson und für den Auftriebsbeiwert bezogen auf die Daten von Norberg.	38
3.3. RMS und Fourier-Koeffizienten des Auftriebsbeiwerts sowie die dimensionslose Ablösefrequenz aus dem Zeit- und Frequenzbereichsverfahren.	47
3.4. Auftriebsbeiwert aus Harmonic Balance für die nach Spiker ermittelte Fundamentalfrequenz und die entsprechenden Referenzdaten aus dem Zeitbereichsverfahren. .	51
3.5. Zusammensetzung des harmonischen Sets für die Untersuchung der Auswirkungen einer erhöhten Unsicherheit in der Fundamentalfrequenz bei Harmonic Balance . .	52
3.6. Setups für die Nebenharmonischen	60
4.1. Parameter der Grenzschicht aus der Simulation mit TRACE und von Kuhn, [22]. .	74
4.2. Parameter der Grenzschicht aus der Simulation mit TRACE und des Experiments von Ahuja, [1].	80
4.3. Strouhal-Zahlen der ersten vier Moden des Druckverlaufs am Kavitätenboden und die dimensionslose Amplitude des Signals.	83
4.4. Frequenzen der 2. Mode aus der Theorie und dem Zeitbereichsverfahren sowie die Änderungsrate des Phasenwinkels der entsprechenden Harmonic Balance Simulation. Zusätzlich das Ergebnis der linearen Extrapolation nach Spiker.	86
4.5. Strouhal-Zahlen der ersten vier Moden des Druckverlaufs am Kavitätenboden sowie die dimensionslose Amplitude des Signals für die Daten von Ahuja, [1], Ashcroft, [2], der Simulationen im Zeit- und Frequenzbereich.	88
A.1. Zustände im Strömungsfeld zu Beginn einer Simulation des Zylinders bei $Re = 100$	104
A.2. Fernfeldrandbedingung der Simulationen des Zylinders	104
A.3. Zustände im Strömungsfeld zu Beginn einer Simulation der Kavität mit $L/T = 0,5$ und bei $Ma = 0,14$	108
A.4. Parameter der Einströmrandbedingung	108
A.5. Fernfeldrandbedingung der Simulationen des Zylinders	109

A.6. Zustände im Strömungsfeld zu Beginn einer Simulation der Kavität bei $Ma = 0,26$	110
A.7. Parameter der Einströmrandbedingung	110

1. Einleitung

Die numerische Strömungsmechanik (CFD¹) ist ein mächtiges Werkzeug für Forschung und Industrie zur Vorhersage des Verhaltens eines Fluids. Einerseits kann dazu beigetragen werden unerklärte Strömungsphänomene zu verstehen und andererseits eröffnen sich Möglichkeiten zur Reduzierung der Entwicklungskosten.

Mit voranschreitender Globalisierung sieht sich die Industrie mit einem steigenden Konkurrenzdruck konfrontiert und hat daher ein großes Interesse Kosten einzusparen. Dafür offerieren die numerischen Vorhersagen von CFD die Möglichkeit frühzeitig in einem Auslegungsprozess notwendige Änderungen zu identifizieren. Fehler, die erst spät in diesem Prozess entdeckt werden, sind aufgrund des exponentiellen Anstiegs der Entwicklungskosten mit der Zeit sehr kostenintensiv. Des Weiteren besteht die Möglichkeit in Optimierungsprozessen eine Vielzahl von Parametern zu testen ohne die enormen Kosten einer Messkampagne und von Einzelteilerfertigungen tragen zu müssen.

Innerhalb der numerischen Strömungsmechanik hängen die finanziellen Ausgaben direkt mit dem Rechenaufwand zusammen, der wiederum von der Dimensionierung des Falls, der Komplexität der Strömungsphänomene und den Genauigkeitsanforderungen abhängig ist. Das Niveau an Komplexität und Genauigkeit legt fest, ob Vereinfachungen an der physikalischen Beschreibung eines Fluids durch die Navier-Stokes Gleichungen getroffen werden können. Diese vereinfachenden Annahmen bieten ein erhebliches Potential zur Reduzierung des Aufwands bzw. Kosten. Aus diesem Grund wird von der Industrie die Neu- bzw. Weiterentwicklung von Berechnungsmethoden basierend auf diesen Annahmen gefördert, um fallspezifisch effiziente Simulationen durchführen zu können. Dazu stellt die statistische Turbulenzmodellierung mit den RANS²-Gleichungen das bekannteste Beispiel dar.

In dieser Arbeit soll das Frequenzbereichsverfahren Harmonic Balance untersucht werden, welches vereinfachend voraussetzt, dass das Strömungsfeld periodisch schwingt. Dieser Eingriff in die Physik bedeutet, dass keine transienten Vorgänge dargestellt werden können, jedoch kann nach Hall, [15], der Rechenaufwand für geeignete Anwendungsfälle gegenüber Zeitbereichsverfahren um eine bis zwei Größenordnungen reduziert werden.

Harmonic Balance hatte seine Anfänge in der Signaltechnik und Strukturdynamik. Im Vergleich dazu ist der Einsatz in der numerischen Strömungsmechanik nach Hall, [14], mit ca. 20 Jahren relativ jung. Aufgrund dieser kurzen Zeit und vor allem wegen der Eignung des Verfahrens für Turbomaschinen, kommt es hauptsächlich in diesem Anwendungsgebiet zum Einsatz. So ist die Frequenzbereichsmethode fester Bestandteil des Strömungslösers TRACE³ des Deutschen

¹Computational Fluid Dynamics

²Reynolds-Averaged Navier-Stokes

³Turbomachinery Research Aerodynamics Computational Environment

Zentrums für Luft- und Raumfahrt und wird von seinen Industriepartnern für die Entwicklung von Turbomaschinen angewendet. Dabei beschränkt sich die Anwendung des Verfahrens auf Schwingungsphänomene, deren Frequenz als Vielfaches der Drehzahl bzw. synchron zur Drehzahl dargestellt werden können.

Im Rahmen eines Forschungsprojekts mit der MTU⁴ bezüglich nicht synchroner Vibrationen (NSV) in Triebwerken ist es von Interesse, ob die Anwendung von Harmonic Balance denkbar ist. Zum einen erfüllen NSV die Voraussetzung an die Periodizität und zum anderen sind diese Vibrationen gekennzeichnet durch selbst-induzierte Instabilitäten, deren Fundamentalfrequenz unbekannt ist, was allerdings als essentieller Baustein für das Verfahren vorgegeben werden muss. Diese Überlegungen sind unter anderem durch experimentelle Untersuchungen des Labyrinthdichtungssystems in einem Triebwerk motiviert. Dabei wurden schadhafte Schwingungen registriert, welche die Eigenfrequenz der Struktur der Dichtung anregen und so zum Bauteilversagen führen. Als Quelle konnte die fluid-dynamische Anregung durch eine Kavität im Dichtungssystem, welche asynchron zur Drehzahl ist, identifiziert werden. Um das Phänomen zu verstehen, effektive Gegenmaßnahmen einleiten zu können und vor dem Hintergrund, dass experimentelle Methoden an ihre Grenzen stoßen, soll CFD angewendet werden. Hierfür sind die Abmaße des Rechengebiets in Kombination mit Zeitbereichsverfahren zu kostenintensiv, weshalb die Anwendung einer effizienteren Methode, Harmonic Balance, wünschenswert ist. Jedoch ist es fragwürdig, ob das Verfahren erfolgreich eingesetzt werden kann, da zwar NSV periodisch sind, jedoch eine essentielle Voraussetzung des Verfahrens, die Fundamentalfrequenz, eine Unbekannte ist.

Daraus lässt sich die übergeordnete Zielsetzung dieser Arbeit ableiten: Kann Harmonic Balance für selbst-induzierte periodische Schwingungsphänomene, bei denen die Fundamentalfrequenz nicht bekannt ist, angewendet werden?

Dazu soll zunächst anhand des akademischen Testfalls eines Zylinders die prinzipielle Anwendbarkeit des Verfahrens mit TRACE gezeigt werden. Außerdem soll die Frequenzsuchstrategie nach Spiker, [36], demonstriert werden, wobei vor allem die Grenzen des Verfahrens von Interesse sind, um Vorhersagen für andere Anwendungsfälle ableiten zu können.

In der Literatur beschränken sich die Untersuchungen des Verhaltens von Harmonic Balance bei unbekannten Fundamentalfrequenzen hauptsächlich auf den Zylinder. Vor dem Hintergrund des enormen Potentials der Methode und dem Interesse die Anwendbarkeit auf Fälle unbekannter Fundamentalfrequenz auszuweiten, sollen neue und komplexere Testfälle dazu untersucht werden. Motiviert durch das praxisrelevante Problem der MTU handelt es sich dabei um Kavitäten.

Als Bewertungskriterium soll der Zylinder und die Kavitäten hinsichtlich Effizienz und Lösungsqualität gegenüber Zeitbereichsverfahren betrachtet werden. Deshalb sind zusätzlich Simulationen der Testfälle mit konventionellen Methoden im Zeitbereich notwendig.

⁴Motoren- und Turbinen-Union

2. Grundlagen

2.1. Navier-Stokes Gleichungen

In der Strömungsmechanik beschreibt man die Bewegung eines kompressiblen und reibungsbehafteten Fluides im Kontinuum mithilfe der Navier-Stokes Gleichungen. Das Gleichungssystem setzt sich aus den Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie (2.1) zusammen. Hierbei bezeichnet man die Dichte (ρ), die kartesischen Geschwindigkeitskomponenten ($\underline{u} = (u, v, w)^T$) den Druck (p) als die primitiven Größen. Des Weiteren kennzeichnet S_M einen möglichen Quellterm, der aus Volumenkräften resultiert und S_E eine Energiequelle.

Ziel dieses Abschnittes ist es den Schubspannungstensor ($\underline{\tau}$), die spezifische Totalenergie (e_t) und der Vektor des spezifischen Wärmeflusses ($\underline{\dot{h}}$) in Abhängigkeit von ρ, u, v, w und p darzustellen. Dadurch wird das System geschlossen, weshalb diese Abhängigkeiten als Schließungsbedingungen deklariert werden.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) &= 0 \\ \frac{\partial \rho \underline{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u} \otimes \underline{u}) - \nabla \cdot \underline{\tau} + \nabla p &= \underline{S}_M \\ \frac{\partial \rho e_t}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_t \underline{u}) + \nabla \cdot \underline{\dot{h}} - \nabla \cdot (\underline{u} \underline{\tau}) + \nabla \cdot (\underline{u} p) &= S_E \end{aligned} \quad (2.1)$$

2.1.1. Schließungsbedingungen

Unter der Voraussetzung eines newtonschen Fluides erhält man eine Kopplung zwischen den Spannungskomponenten von $\underline{\tau}$ und der linearen Deformationsrate eines Fluidteilchens. Nimmt man zusätzlich Isotropie an, erhält man das newtonsche Viskositätsgesetz mit der dynamischen Viskosität (μ) für die Scherspannungselemente zu:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right). \quad (2.2)$$

Unter Hinzunahme der Stokesschen Hypothese erhält man zusätzlich Formulierungen für die Normalspannungselemente.

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \underline{u}), \quad \tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \underline{u}), \quad \tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \underline{u}) \quad (2.3)$$

Mit der fourierschen Wärmeleitungsgleichung erhält man einen Zusammenhang, der den richtungsabhängigen Wärmefluss mithilfe der Wärmeleitfähigkeit (λ) und dem Temperaturgradienten darstellt. Aufgrund der bereits erwähnten Isotropie, kann die Wärmeleitfähigkeit als Skalar benutzt werden.

$$\underline{\dot{h}} = \begin{bmatrix} \dot{h}_x \\ \dot{h}_y \\ \dot{h}_z \end{bmatrix} = -\lambda \nabla T \quad (2.4)$$

Für ein Fluid, welches sich im thermodynamischen Gleichgewicht befindet, erhält man eine Kopplung der Temperatur mit den anderen thermodynamischen Zustandsgrößen: $T = T(\rho, p)$. Setzt man zusätzlich voraus, dass man sich auf die Behandlung idealer Gase beschränkt, erhält man unter Gebrauch der Gaskonstanten (R) das ideale Gasgesetz.

$$T = \frac{p}{\rho R} \quad (2.5)$$

Die spezifische Totalenergie lässt sich in seine spezifischen Komponenten aus innerer Energie (i) und kinetischer Energie zerlegen.

$$e_t = i + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \quad (2.6)$$

Mit der Einschränkung auf perfekte Gase können die isobare und isochore Wärmekapazität (c_p und c_v) als konstant betrachtet werden. Dadurch kann man die spezifische innere Energie als eine Funktion der Temperatur ausdrücken. Hierbei ist es üblich, die Wärmekapazität durch den Isentropenexponenten (κ) und die Gaskonstanten darzustellen.

$$i = c_v T = \frac{RT}{(\kappa - 1)} \quad (2.7)$$

Die Annahme eines perfekten Gases befähigt außerdem zur Einführung der Prandtl-Zahl, um die Wärmeleitfähigkeit aus der fourierschen Wärmeleitungsgleichung (2.4) zu eliminieren.

$$\lambda = \frac{\mu c_p}{Pr} = \frac{\kappa R \mu}{(\kappa - 1) Pr} \quad (2.8)$$

Um schließlich das System aus Erhaltungsgleichungen schließen zu können, wird ein Zusammenhang für die kinematische Viskosität benötigt. Für ein perfektes Gas ergibt sich eine Proportionalität zwischen Viskosität und Temperatur (T). Das Modell von Sutherland, [37], bietet eine Möglichkeit diese Proportionalität darzustellen. Unter Hinzunahme einer Referenzviskosität (μ_0), einer dazugehörigen Referenztemperatur (T_0) sowie einer Konstante (C) erhält man:

$$\mu = \mu_0 \frac{T_0 + C}{T + C} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (2.9)$$

Abschließend ist anzumerken, dass im Anhang A eine detailliertere Beschreibung von Massen-, Impuls- und Energieerhaltung (2.1) zu finden ist .

2.2. Turbulenz

2.2.1. Grundlagen der Turbulenz

Osborne Reynolds gilt mit seiner Veröffentlichung von 1883, [29], als der Entdecker der Turbulenz. In seinen experimentellen Untersuchungen einer Kanalströmung färbte er am Eintritt einen Teil der Strömung ein. Für relativ niedrige Durchströmungsgeschwindigkeiten konnte er zuerst eine geradlinige fadenförmige Ausbreitung des eingefärbten Fluids beobachten. Durch eine Erhöhung der Geschwindigkeit verlor der Faden seine Geradlinigkeit und ein chaotisches Verhalten konnte festgestellt werden, welches von einer hohen Durchmischung der Farbe mit dem umgebenden Fluid gekennzeichnet war. Den Strömungszustand bei erhöhter Geschwindigkeit nennt man Turbulenz. Er ist nach Versteeg, [41], durch folgende Merkmale gekennzeichnet:

- chaotisch
- zeitabhängig
- dreidimensional und rotational
- mehrskalig
- diffusiv und dissipativ

Die Reynoldszahl (Re) ist ein Indikator für den laminaren und turbulenten Strömungszustand. Die Kennzahl stellt das Verhältnis von Trägheits- zu Zähigkeitskräften dar. Zur Berechnung wird die Strömungsgeschwindigkeit (u), die dynamische Viskosität (μ) und eine charakteristische Länge (l) benötigt.

$$Re = \frac{\rho u l}{\mu} \quad (2.10)$$

Für große Reynoldszahlen dominieren in einer Strömung Trägheitskräfte gegenüber viskosen Kräften. Folglich werden in eine Strömung eingebrachte Störungen nicht gedämpft sondern angefacht. Ein geordneter bzw. laminarer Zustand kann nicht aufrechterhalten werden, d.h. die Strömung schlägt um auf turbulent. Infolgedessen lassen sich durch ortsfeste Punktmessungen statistische Schwankungen der Strömungsgrößen um einen zeitlichen Mittelwert feststellen (vgl. Abb. 2.3). Zusätzlich kann es zu einer Überlagerung des mittleren Geschwindigkeitsfeldes mit kohärenten Wirbelstrukturen kommen.

Kennzeichnend für Turbulenz ist nach Versteeg, [41], die spektrale Energie (E_λ), welche als die kinetische Energie von Fluktuationen pro Masseneinheit und Wellenzahl definiert ist. In Abbildung 2.1 ist die Abmessung eines Wirbels in Form der Wellenlänge (λ) dieses Wirbels dargestellt. Das vorliegende Energiespektrum unterteilt sich in den Bereich der Energiezufuhr (I), den Inertialbereich (II) und den Dissipationsbereich (III).

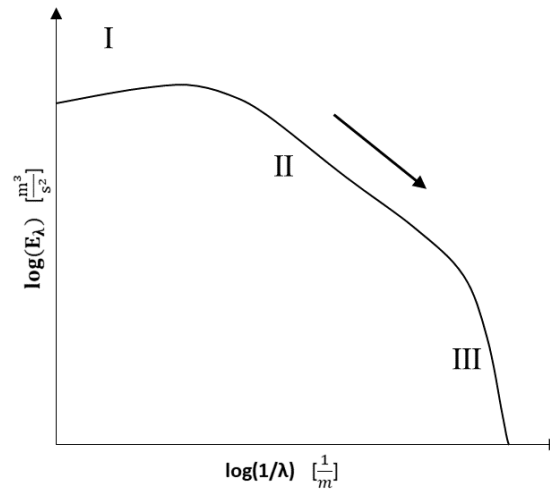


Abb. 2.1.: Logarithmische Darstellung der spektralen Energie unterschiedlicher Wirbelgrößen (reproduziert nach Versteeg, [41]).

Versteeg, [41], beschreibt, dass die größten turbulenten Wirbel Energie aus der gemittelten Hauptströmung beziehen. Dieser Vorgang wird als Wirbeldehnung bezeichnet und beruht darauf, dass aufgrund der Viskosität ein Wirbel an einer Stelle gezwungen wird, sich schneller zu bewegen als an einer anderen Position. Bildet man die Reynoldszahl mit charakteristischer Geschwindigkeit und charakteristischer Länge dieser Wirbel, ergibt sich, dass diese Wirbel von Trägheitskräften dominiert werden.

Hingegen interagieren kleinere Wirbel schwächer mit der Hauptströmung als mit den großen Wirbeln. Folglich entnehmen kleinere Wirbel die Energie für die Dehnung aus den größeren Wirbeln. Die kleinsten Wirbel werden von viskosen Effekten dominiert, was aus ihrer Reynoldszahl ersichtlich wird. Dadurch wird ihre spektrale Energie in innere Energie umgewandelt, bzw. dissipiert.

Den Gesamtprozess von Energieentnahme aus der Hauptströmung, Weitergabe an kleiner Wirbelstrukturen bis hin zur Dissipation bezeichnet man als Energiekaskade und ist in Abbildung 2.1 durch einen Pfeil gekennzeichnet

2.2.2. Turbulenzbehandlung

Skalenauflösende Methoden

DNS¹-Verfahren bilden die Physik ohne Einschränkungen ab. Dafür werden die Erhaltungsgleichungen von Masse, Impuls und Energie (2.1) unverändert unter Einbeziehung der Schließungsbedingungen genutzt. Dadurch wird versucht die gesamte Energiekaskade ausgehend von großen zu kleinen Wirbelstrukturen bis hin zur Dissipation zu simulieren (siehe Abb. 2.2).

Für typische technische Anwendungen gibt Versteeg, [41], für die kleinsten Wirbel Längenskalen von 0,1 bis 0,01mm und Zeitskalen von ca. 10kHz an. Dadurch werden für eine erfolgreiche Simulation extreme Anforderungen an die Rechennetauflösung und den Zeitschritt gestellt, was mit

¹engl. Direct Numerical Simulation

einem hohen Rechenaufwand verbunden ist.

Um die Anforderungen an die Auflösung zu reduzieren, kann ein Teil des Energiespektrums modelliert werden, d.h. Filter verwerfen Wirbel, die definierte Grenzwerte in räumlichen und zeitlichen Skalen unterschreiten und führen die Energie über Modelle an die Simulation zurück. Diese Art von Simulationen nennt man LES² (siehe Abb. 2.2). Aufgrund einer teilweisen Modellierung des turbulenten Spektrum bei LES, sind diese Simulationen mit einem geringeren Rechenaufwand verbunden als DNS.

Statistische Turbulenzmodellierung - RANS

Die RANS³-Gleichungen berechnen keine Fluktuationsgrößen und modellieren somit das gesamte turbulente Energiespektrum (vgl. Abb. 2.2). Die den RANS-Gleichungen zugrunde liegenden Modelle berücksichtigen lediglich die Auswirkungen der Turbulenz auf die zeitgemittelte Strömung. Für diese Methode zur Turbulenzbehandlung gelten die geringsten Anforderungen an zeitliche und räumliche Auflösung, weshalb ebenfalls der Rechenaufwand am geringsten ist.

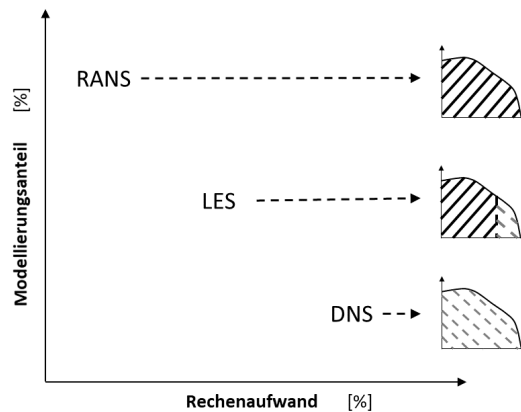


Abb. 2.2.: Übersicht der unterschiedlichen Klassen der Turbulenzbehandlung mit Modellierungsanteil (schwarze Schraffur) und Simulationsanteil (graue Schraffur).

Im Folgenden wird näher auf die RANS-Gleichungen eingegangen, da diese Art der Turbulenzmodellierung im späteren Verlauf der Arbeit genutzt wird.

Ausgangspunkt der RANS-Gleichungen ist die Reynoldszerlegung (2.11), d.h. jede Strömungsgröße ($\Phi(\underline{x}, t)$) wird als Superposition eines mittleren Zustands ($\overline{\Phi}(\underline{x})$) und einer Fluktuations- bzw. Schwankungsgröße ($\Phi'(\underline{x}, t)$) dargestellt.

$$\Phi(\underline{x}, t) = \overline{\Phi}(\underline{x}) + \Phi'(\underline{x}, t) \quad (2.11)$$

²engl. Large Eddy Simulation

³engl. Reynolds-Averaged Navier-Stokes

Um die Reynoldszerlegung zu verdeutlichen ist beispielhaft in Abbildung 2.3 ein Geschwindigkeitsmessung aus einer stationären und turbulenten Strömung dargestellt. Dabei weisen die Oszillationen der Fluktuationsgröße um die gemittelte Größe einen statistischen Charakter auf. Durch eine Mittelung der Strömungsgröße über ein ausreichend großes Zeitintervall (Δt) verliert diese Größe ihre Zeitabhängigkeit.

$$\bar{\Phi}(\underline{x}) = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \Phi(\underline{x}, t) dt \quad (2.12)$$

Wie bereits zuvor erwähnt, handelt es sich bei den Fluktuationsgröße um eine statistische Größe, d.h. durch die Mittelung über ein ausreichend großes Zeitintervall muss die Fluktuation zu null werden.

$$\bar{\Phi}'(\underline{x}, t) = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \Phi'(\underline{x}, t) dt \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.13)$$

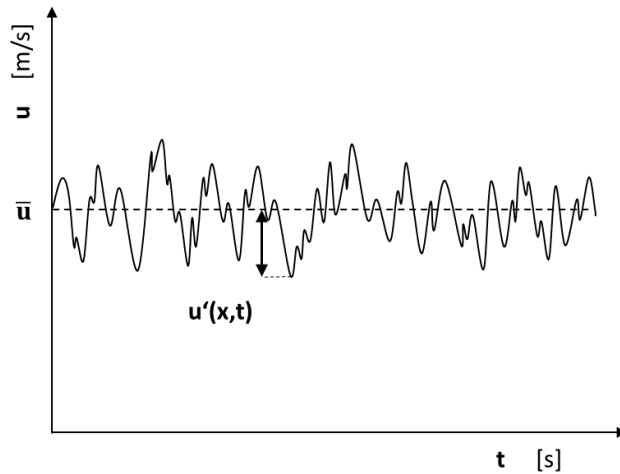


Abb. 2.3.: Messschrieb einer ortsfesten Geschwindigkeitsmessung in einer stationären und turbulenten Strömung

Für inkompressible Strömungen könnte man an dieser Stelle die Reynoldszerlegung auf die Strömungsgrößen der Erhaltungsgleichungen anwenden und anschließend den zeitlichen Mittelwert bilden um die RANS Gleichungen zu erhalten. Jedoch ist es für die Betrachtung von Kompressibilität nach Anderson, [7], üblich, eine dichtegewichtete zeitliche Mittelung, auch Favre-Mittelung genannt, einzuführen. Die Definition der Favre-gemittelte Strömungsgröße ($\tilde{\Phi}(\underline{x})$) erhält als:

$$\tilde{\Phi}(\underline{x}) = \frac{\overline{\rho \Phi}}{\bar{\rho}} = \frac{1}{\Delta t \bar{\rho}} \int_0^{\Delta t} \rho(\underline{x}, t) \Phi(\underline{x}, t) dt. \quad (2.14)$$

Analog zur Reynoldszerlegung lässt sich mithilfe der dichtegewichteten Mittelungsgröße die Favre-Zerlegung definieren, wobei $\Phi''(\underline{x}, t)$ die Fluktuation darstellt.

$$\Phi(\underline{x}, t) = \tilde{\Phi}(\underline{x}) + \Phi''(\underline{x}, t). \quad (2.15)$$

Nach Anderson, [7], wendet man zuerst die Reynoldszerlegung auf alle Strömungsgrößen von Massen-, Impuls- und Energieerhaltung (2.1) an. Anschließend bildet man den zeitlichen Mittelwert des Systems und wiederholt das Vorgehen für die Favre-Zerlegung mit der Einschränkung auf die Produkte von Dichte und einer Strömungsgröße. Das Ergebnis nennt man die Favre-gemittelten Navier-Stokes Gleichungen und ist für nähere Details zur Zusammensetzung in der Literatur von Anderson, [7], zu finden. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird vereinfachend mit der Bezeichnung RANS-Gleichungen auf dieses System Bezug genommen.

Infolge der Zerlegung und Mittlung entstehen im Vergleich zum System aus Abschnitt 2.1 neue Terme, sodass man ein unterbestimmtes System erhält. Korrelation für diese Terme zu finden, wird nach Pope, [28], als das turbulente Schließungsproblem bezeichnet.

Zu diesen Termen zählen die Reynoldsspannungen, die das Produkt der Geschwindigkeitsfluktuationen sind und sich in einem Tensor ($\underline{\underline{\tau}}^t$) zusammenfassen lassen.

$$\underline{\underline{\tau}}^t = \overline{\underline{u}'' \otimes \underline{u}''} \quad (2.16)$$

Für nachfolgende Betrachtungen wird darüber hinaus die Definition der turbulenten kinetischen Energie (k) benötigt.

$$k = \frac{\overline{u''u''} + \overline{v''v''} + \overline{w''w''}}{2} \quad (2.17)$$

Im Rahmen dieser Arbeit soll kurz auf die Lösung des turbulenten Schließungsproblems durch das k - ω -Modell nach Wilcox, [44], und durch das SST⁴-Modell nach Menter, [24], eingegangen werden. Beide Modelle bedienen sich der Boussinesq-Annahme, welche die Komponenten des Reynoldsspannungstensors proportional zur linearen, mittleren Deformationsrate eines Fluidteilchens setzt. Der zentrale Unterschied zwischen den genannten Zwei-Gleichungsmodellen zu einem Reynoldsspannungsmodell ist die Annahme isotrope Turbulenz, d.h. die Wirbelviskosität (μ^t) ist identisch für jede Komponente des Reynoldsspannungstensors. Exemplarisch sei hier eine Komponente des Tensor dargestellt. Den vollständigen Tensor erhält man analog zum newtonschen Viskositätsgesetz aus Abschnitt 2.1.1.

$$\tau_{xy}^t = \mu^t \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) \quad (2.18)$$

⁴engl. Shear Stress Transport

Die Wirbelviskosität ist im Gegensatz zur dynamischen Viskosität (μ) keine Stoffgröße sondern eine Eigenschaft der Strömung. Durch das Einsetzen der konventionellen Schließungsbedingungen, der Reynoldsspannungen, der Einführung einer konstanten turbulenten Prandltzahl (Pr^t) und der algebraischen Umformung der RANS-Gleichungen kann nach Versteeg, [41], gezeigt werden, dass lediglich Zusammenhänge für μ_t und k benötigt wird, um das System zu schließen.

Im Falle des k - ω -Modells lässt sich die Wirbelviskosität in Abhängigkeit der turbulenten kinetischen Energie (k) und ihrer spezifischen Dissipationsrate (ω) definieren.

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega} \quad (2.19)$$

Vorteil dieser Darstellung ist es, dass es sich bei k und ω um Transportgrößen handelt. Folglich kann das System aus Masse-, Impuls- und Energieerhaltung um zwei Gleichungen erweitert werden. Für die genaue Definition der zusätzlichen Erhaltungsgleichungen für k und ω sei auf die Literatur von Wilcox, [44], verwiesen.

Durch eine Substitution von $\epsilon = C_\mu \omega k$ erhält man aus der ω -Transportgleichung einen Zusammenhang für die Dissipationsrate (ϵ) der turbulenten kinetischen Energie. Hierbei bezeichnet C_μ eine Konstante. In Verbindung mit der k -Gleichung ergibt sich somit das k - ϵ -Modell.

Menter stellte fest, dass das k - ω -Modell in Grenzschichten vorteilhaft ist, wohingegen k - ϵ -Modell für nicht-wandgebundene Strömungen die Turbulenz besser modelliert (siehe Abb. 2.4).

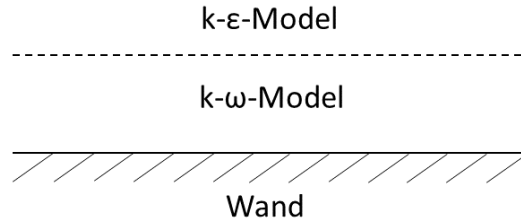


Abb. 2.4.: Bevorzugte Einsatzgebiete des k - ϵ - und k - ω -Modells

Im SST-Modell sind die Gleichungen für k , ω und ϵ integriert. Mithilfe von Vermischungsfunktionen (engl. blending functions) versucht das SST-Modell die Vorteile beider Modell zu nutzen, indem es die ϵ - bzw. ω -Gleichung dämpft. Dadurch ist das SST-Modell besonders in Strömungen, die Ablösung beinhalten, zu bevorzugen, da sowohl eine Grenzschicht als auch der abgelöste Strömungszustand zu modellieren ist. Für nähere Details zum Modell sei auf die Literatur von Menter, [24], verwiesen.

2.3. Zeitdiskretisierung der Navier-Stokes Gleichungen

Die populärste Methode zur Diskretisierung der im Kontinuum formulierten Navier-Stokes Gleichungen ist die Finite-Volumen-Methode (FVM). Im Folgenden wird auf diese Methode näher eingegangen. Als alternativer Ansatz dazu ist die DG⁵ Methode zu erwähnen, welche aufgrund ihres geringeren Entwicklungsstandes kaum Anwendung in der Industrie findet. Allerdings wird ihr Potenzial hoch eingeschätzt, da numerische Verfahren von beliebig hoher Ordnung eingesetzt werden können.

Im Hinblick auf die Behandlung des Systems aus Massen-, Impuls- und Energieerhaltung (2.1) mit numerischen Verfahren, ist eine kompaktere Schreibweise zielführender. Aus diesem Grund definiert man einen Zustandsvektor (\underline{q}), dessen Komponenten die Erhaltungsgrößen bzw. konservativen Variablen sind.

$$\underline{q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho e_t \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

In Abhängigkeit dieses Vektors ergibt sich dann eine konvektive Flussmatrix ($\underline{\underline{F}}(\underline{q})^c$), eine viskose Flussmatrix ($\underline{\underline{F}}(\underline{q})^v$) und ein Vektor mit den Quelltermen ($\underline{S}(\underline{q})$).

$$\frac{\partial \underline{q}}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\underline{\underline{F}}(\underline{q})^c - \underline{\underline{F}}(\underline{q})^v) = \underline{S}(\underline{q}) \quad (2.21)$$

Um die hier getroffenen Konventionen nachvollziehen zu können, ist im Anhang B die Zusammensetzung der Terme des Systems (2.21) gegeben. Es sei darauf verwiesen, dass die zuvor erwähnten Schließungsbedingungen aus Abschnitt 2.1.1 angewendet werden müssen, um ein lösbares System zu erhalten.

2.3.1. Räumliche Diskretisierung

Als erster Schritt auf dem Weg zu einer im Raum diskreten Darstellung des Systems aus Erhaltungsgleichungen (2.21) ist die Unterteilung des Rechengebiets in eine endliche Anzahl von Kontrollvolumina bzw. Zellen. Exemplarisch wird im Folgenden die Integration des Systems über das Kontrollvolumen (KV_i) gezeigt.

$$\int_{KV_i} \frac{\partial}{\partial t} \underline{q} \, dV + \int_{KV_i} \underline{\nabla} \cdot (\underline{\underline{F}}(\underline{q})^c - \underline{\underline{F}}(\underline{q})^v) \, dV = \int_{KV_i} \underline{S}(\underline{q}) \, dV \quad (2.22)$$

⁵engl. Discontinuous Galerkin

Unter der Voraussetzung, dass der Fluss stetig differenzierbar ist, kann hier der Gaußsche Integralsatz angewendet werden. Demnach ist die Änderung des Flusses innerhalb des KV_i identisch zum normalen Fluss über den Zellrand (∂KV_i). Infolge der algebraischen Umformungen erhält man den Fluss als vektorwertigen Term ($\underline{F}(\underline{q})$), dessen Zusammensetzung im Anhang B aufgeführt ist. Mithilfe des Skalarprodukts von Flussvektor und Normalenvektor (\underline{n}) wird die Orientierung des Flusses senkrecht zum Zellrand gewährleistet.

$$\int_{KV_i} \frac{\partial}{\partial t} \underline{q} \, dV + \int_{\partial KV_i} \underline{F}(\underline{q}) \cdot \underline{n} \, dA = \int_{KV_i} \underline{S}(\underline{q}) \, dV \quad (2.23)$$

Die Linienmethode erlaubt es zuerst die räumliche Diskretisierung unabhängig von der Dimension Zeit durchzuführen. Dafür vertauscht man die Reihenfolge der Integration und der zeitlichen Ableitung im ersten Term des Systems. Mit der Definition des Zustandes am Zellmittelpunkt (\underline{q}_i) als integralen Mittelwert, können die Volumenintegrale gelöst werden.

$$\frac{\partial}{\partial t} V_i \underline{q}_i + \int_{\partial KV_i} \underline{F}(\underline{q}) \cdot \underline{n} \, dA = V_i \underline{S}(\underline{q}_i) \quad (2.24)$$

Das Integral des Flusses über den gesamten Zellrand (∂KV_i) kann in eine Summe von Flussintegralen über die Einzelflächen (A_r) aufgeteilt werden. Entsprechend der geometrischen Form des Kontrollvolumens muss die Summation über eine Anzahl (R) von Flächenelementen durchgeführt werden. Wie bereits zuvor wird der Normalenvektor eines Flächenelements ($\underline{n}_{i,r}$) genutzt, um die Orientierung des Fluss senkrecht zu den Zellrändern (A_r) sicherzustellen.

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{q}_i + \frac{1}{V_i} \sum_{r=1}^R \int_{A_r} \underline{F}(\underline{q}) \cdot \underline{n}_{i,r} \, dA_r = \underline{S}(\underline{q}_i) \quad (2.25)$$

Die kontinuierlichen Flussintegrale über die Zellränder approximiert man mittels Gaußquadratur, woraus sich je nach Ordnung die Forderung nach einer unterschiedlichen Anzahl von Stützstellen auf den einzelnen Oberflächenelementen ergeben. Demzufolge muss der Flussvektor auf den Zellrändern ausgewertet werden.

Im Rahmen der FVM liegen die Zustände in einer Zelle jedoch lediglich an ihrem Mittelpunkt vor. Das Problem der Rekonstruktion der Zustände wird für die konvektiven und viskosen Flüsse unterschiedlich gelöst. Für die Zustände auf dem Zellrand im konvektiven Fluss kann beispielsweise mit einem MUSCL⁶-Verfahren nach van Leer, [40], rekonstruiert werden, wobei die Entstehung neuer Extrempunkte begrenzt werden muss. Zusätzlich benötigt man einen Riemannlöser, da die Werte auf einem von zwei Zellen geteilten Zellrand unterschiedlich sein können, was einer Unstetigkeit entspricht.

Die Ableitungen der Zustände auf den Rändern für die Auswertung des viskosen Flusses können mithilfe eines zentralen Differenzschemas behandelt werden. Nachdem die Flüsse vollständig diskretisiert wurden, kann der Flussterm und der Quellterm im Residuum (\underline{R}) für das Kontrollvolumen (KV_i) zusammengefasst werden.

⁶engl. Monotonic Upwind Scheme for Conservation Laws

$$\frac{d}{dt}\underline{q}_i + \underline{R}(\underline{q}_i, \dots) = \underline{0} \quad (2.26)$$

An dieser Stelle wurde die Darstellung des Systems (2.26) mit dem Index „ i “ gewählt, um die räumliche Diskretisierung zu verdeutlichen. Vor allem sollte die Abhängigkeit des Residuums von einem oder mehreren Zellmittelwerten je nach Verfahrenswahl verdeutlicht werden. Aus Gründen der Übersichtlichkeit soll im Nachfolgenden auf die Indexdarstellung verzichtet werden.

$$\frac{d}{dt}\underline{q} + \underline{R}(\underline{q}) = \underline{0} \quad (2.27)$$

2.3.2. Nichtlineares Zeitbereichsverfahren

Nachdem im vorigen Abschnitt im Zuge der Linienmethode ein semi-diskretes bzw. gewöhnliches Differenzialgleichungssystem (2.27) gefunden wurde, wird in diesem Abschnitt die Behandlung der zeitlichen Ableitung beschrieben. Dafür wird zuerst die Integration vom aktuellen Zeitschritt (t^n) auf den neuen Zeitschritt (t^{n+1}) durchgeführt.

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{d}{dt}\underline{q} dt + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \underline{R}(\underline{q}) dt = \underline{0} \quad (2.28)$$

Die Lösung des ersten Integrals erhält man direkt, wobei der Superskript (n) die Zugehörigkeit eines Zustandes zum Zeitschritt (t^n) kennzeichnet.

$$\underline{q}^{n+1} - \underline{q}^n + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \underline{R}(\underline{q}) dt = \underline{0} \quad (2.29)$$

Die Integration des Residuenters verlangt nach einem numerischen Verfahren. Hierbei unterteilt man zwischen expliziten und impliziten Verfahren. Erstere kennzeichnen sich durch kleine Zeitschritte aufgrund der CFL^7 -Bedingung. Wohingegen implizite Verfahren nahezu beliebig große Zeitschritte benutzen können, was allerdings numerische Dissipation zur Folge hat. Aufgrund geringerer Rechenkosten erfreuen sich die impliziten Verfahren großer Beliebtheit in der Industrie. Exemplarisch wird im Folgenden auf das implizite Euler-Verfahren eingegangen. Hierbei kennzeichnet $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ die Zeitschrittweite.

$$\underbrace{\underline{q}^{n+1} - \underline{q}^n + \Delta t \underline{R}(\underline{q}^{n+1})}_{=I(\underline{q}^{n+1}, \underline{q}^n)} = \underline{0} \quad (2.30)$$

Schlussendlich erhält man ein voll-diskretes nichtlineares Gleichungssystem, welches nach dem Zustand (\underline{q}^{n+1}) zum neuen Zeitpunkt gelöst werden muss.

⁷Courant-Friedrichs-Lewy

Die iterative Lösung mithilfe des Pseudo-Zeitverfahrens ist neben dem Newtonverfahren eine Lösungsvariante. Hierbei betrachtet man das von der physikalischen Zeit abhängige Problem (2.30) als stationär in der Pseudozeit (τ).

$$\frac{dq}{d\tau} = \underline{I}(\underline{q}^{n+1}, \underline{q}^n) = \underline{0} \quad (2.31)$$

Das künstlich erstellte Differenzialgleichungssystem kann mit den üblichen Zeitintegrationsschemata, z.B. implizites Euler-Verfahren, gelöst werden. Es ist anzumerken, dass das Pseudozeitverfahren ebenfalls zur Lösung stationärer Problemstellungen zum Einsatz kommt. Hierfür wird lediglich in der Gleichung (2.31) das instationäre Residuum (\underline{I}) durch das „stationäre“ Residuum (\underline{R}) ersetzt. Um das System (2.31) schließlich lösen zu können, wird das Residuum um den Zustand mit Hilfe einer Taylorentwicklung linearisiert und schließend iterativ gelöst.

2.4. Diskrete Fourier-Transformation

Die kontinuierliche Fourier-Transformation (2.32) ist eine analytische Methode zur Darstellung eines Zeitsignals ($g(t)$) als eine frequenzabhängige Funktion ($G(f)$). In der Praxis liegt ein Zeitsignal meistens als ein endlicher und diskreter Datensatz vor, was zur Entwicklung der diskreten Fourier-Transformation (DFT) motivierte.

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (2.32)$$

Ein solcher Datensatz soll aus einer ungeraden Anzahl (N) von Abtastpunkten bestehen, welche in äquidistanten Abständen (Δt) vorliegen. Das Abtasttheorem von Nyquist postuliert, dass die höchste darstellbare Frequenz in einem diskreten Zeitsignal: $f_{Nyquist} = 1/(2\Delta t)$ ist. Zieht man zusätzlich in Betracht, dass die Niedrigste vom Zeitschrieb erfasste Frequenz eine Periodenlänge hat, welche der Gesamtlänge des Zeitsignals entspricht, wählt man diese Frequenz als Fundamentalfrequenz und definiert Harmonische bis zur Nyquistfrequenz.

$$f_k = \frac{k}{N\Delta t}, \quad k \in \mathbb{Z} : k = \left\{ \frac{-N}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{N}{2} \right\} \quad (2.33)$$

In der Literatur von Neubauer, [25], findet man die Rechenvorschrift für die DFT (2.34). Hierbei bezeichnet g^n einen Abtastpunkt zu einem beliebigen Zeitpunkt $t^n = n\Delta t$ und \hat{g}_k den Fourier-Koeffizient der entsprechenden Frequenz (2.33).

$$\hat{g}_k = \sum_{n=0}^{N-1} g^n e^{-j2\pi kn/N} \quad (2.34)$$

Für die Berechnung aller Fourier-Koeffizienten erhält man ein lineares Gleichungssystem mit einer quadratischen Koeffizientenmatrix (\underline{A}), das mit konventionellen Lösungsverfahren gelöst werden kann.

$$\hat{\underline{g}}_k = \underline{A} \underline{g}^n \quad (2.35)$$

Ein beliebiger Fourier-Koeffizient (\hat{g}_k) setzt sich dabei aus einem reellen und imaginären Anteil zusammen. Für den weiteren Verlauf dieser Arbeit ist es hilfreich eine Definition des Betrags und des Phasenwinkels (Φ) des Koeffizienten vorliegen zu haben.

$$|\hat{g}_k| = \sqrt{(\Re\{\hat{g}_k\})^2 + (\Im\{\hat{g}_k\})^2}, \quad \Phi = \tan^{-1} \left(\frac{\Re\{\hat{g}_k\}}{\Im\{\hat{g}_k\}} \right) \quad (2.36)$$

Analog zur DFT findet man in der Literatur die Rücktransformation, iDFT⁸, welche für alle Zeitpunkte t^n mit $n = 0, \dots, N-1$ durchgeführt werden muss.

$$g^n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{g}_k e^{j2\pi kn/N} \quad (2.37)$$

⁸inverse diskrete Fourier-Transformation

2.4.1. Fehlerquellen einer DFT

Aliasing

Treten in einem Signal Frequenzen auf, welche von der Abtastfrequenz nicht erfasst werden können, d.h. zu wenige Abtastpunkte vorliegen, dann werden diese Frequenzen als niedrigere Frequenzen registriert. Dadurch werden künstlich die Fourier-Koeffizienten von niedrigen Frequenzen verändert, während die unterabgetasteten Frequenzen nicht im Spektrum auftreten. Mit dem Nyquist-Shannon Kriterium:

$$f_{Nyquist} > 2f \quad (2.38)$$

wird die Abtastfrequenz ($f_{Nyquist}$) festgelegt, die notwendig ist, um Aliasing für eine Signalfrequenz (f) zu vermeiden.

Spektraler Leckeffekt

Im Folgenden wird exemplarisch ein diskretes Zeitsignal eines Auftriebsbeiwerts (c_L), welches keine periodische Länge aufweist, betrachtet (siehe Abb. 2.5). Nach Harris, [16], neigen diese Signal bei der Anwendung einer DFT zu spektralen Leckeffekten. Hingegen tritt bei Signalen mit periodischer Länge dieser Effekt nicht auf.

Folglich liegt es nahe den Effekt zu vermeiden, indem man das Signal auf die entsprechende Länge kürzt. In der Realität ist es meistens nicht möglich, das Signal, aufgrund seines diskreten Charakters, auf ein exaktes Vielfaches der Periodenlänge zu reduzieren. Des Weiteren ist diese Methode aufwendig. Deshalb wird in der Praxis oft auf sogenannte Fensterfunktionen zurückgegriffen. Dabei handelt es sich um Intensitätsverteilungen, die dem eigentlichen Signal überlagert wird und dadurch künstlich eine Periodizität des Signals erzwingen. Für das folgende Beispiel wird das „Hanning“-Fenster betrachtet. Um nähere Informationen zu diesen Funktionen zu erhalten, sei auf die genannte Literatur verwiesen.

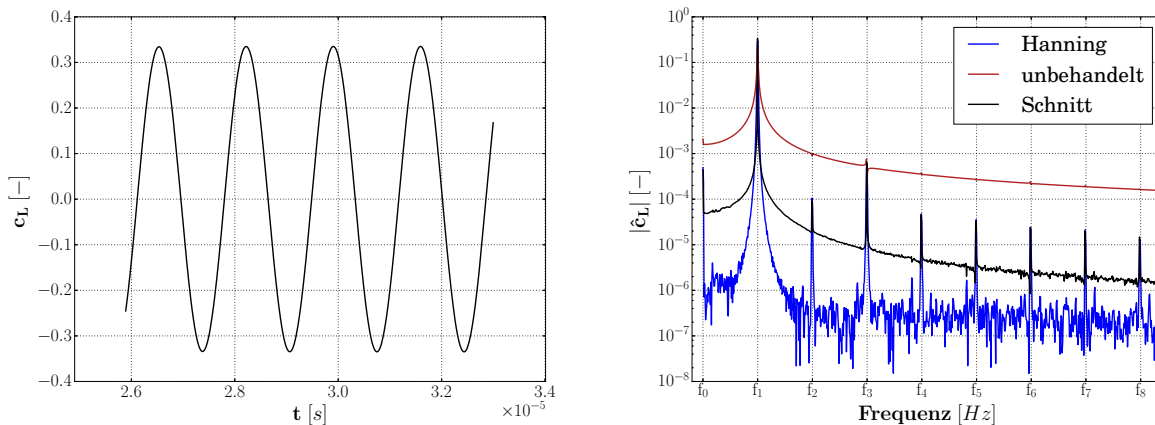


Abb. 2.5.: Nicht periodisches Zeitsignal (links) und Spektrum des selbigen Signal mit unterschiedlicher Ausprägung des spektralen Leckeffekts (rechts).

Anhand der Spektren in Abbildung 2.5 lassen sich die Auswirkungen des Leckeffekts erkennen. Auf der Ordinate ist hier der Betrag des Fourier-Koeffizienten des Auftriebsbeiwertes ($|\hat{c}_L|$) aufgetragen.

Vergleicht man das Spektrum des unbehandelten Signals mit dem des gekürzten Signals, stellt man fest, dass anstelle vieler diskreter Signalspitzen lediglich eine Spitze bei f_1 und eine bei f_3 zu erkennen ist. Außerdem geht aus Tabelle 2.1 hervor, dass der Wert der Spitze bei der 1. Harmonischen geringer als beim gekürzten Signal (Schnitt). Der Grund für die Abweichung ist der spektrale Leckeffekt. Die Energie der diskreten Spitzen hat sich auf benachbarte Frequenzen verteilt und somit das Spektrum „verschmiert“. Der Effekt entsteht dadurch, dass die DFT

Tab. 2.1.: Fourier-Koeffizienten des Auftriebsbeiwerts der dominanten 1. Harmonischen für unterschiedliche Vorkonditionierungen der DFT.

	unbehandelt	Schnitt	Fensterfunktion
$ \hat{c}_L $ in $[-]$	0,2377	0,3349	0,2952

aus der Periodenlänge eine Fundamentalfrequenz ableitet, welche nicht mit der eigentlichen Fundamentalfrequenz des Signal übereinstimmt. Dadurch entsprechen die diskreten Frequenzen (2.33) der DFT nicht exakt den Harmonischen des Signals. Das führt dazu, dass das Spektrum keine diskreten Koeffizienten an den Harmonischen des Signals aufweist. Infolgedessen verteilt sich die Werte dieser Koeffizienten auf benachbarte Frequenzen, was einer „Verschmierung“ gleichkommt.

Beim Vergleich der Spektren aus dem gekürzten Signal und dem „gefensterten“ Signal (siehe Abb. 2.5) legt der visuelle Eindruck nahe, dass für das gekürzte Signal immer noch der spektrale Leckeffekt auftritt, da speziell die Bereiche zwischen den diskreten dominanten Frequenzen ein höheres Niveau haben. Betrachtet man allerdings den Bereich in der näheren Umgebung des ersten Maximalwerts, dann stellt man fest, dass die erste Spitze im Falle des gefensterten Signals stärker „verschmiert“ ist und deshalb der Wert der Spitze in diesem Fall geringer ist (siehe Tab. 2.1).

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass beide Methoden den spektralen Leckeffekt nicht vollständig unterdrücken können. Bei der Kürzung des Signals sind vorallem die Bereiche zwischen den Signalspitzen vom spektralen Leckeffekt beeinflusst, während für die Fensterfunktion die diskreten Signalspitzen „verschmiert“ werden. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden speziell die Signalspitzen betrachtet, deshalb werden die Signal vor der Behandlung mit einer DFT auf periodische Länge gekürzt.

2.5. Nichtlineares Frequenzbereichsverfahren - Harmonic Balance

Dieser Abschnitt befasst sich mit der nichtlinearen Frequenzbereichsmethode, Harmonic Balance. Zunächst sollen einige Eigenschaften des Verfahrens erläutert werden. Anschließend wird anhand des Beispiels einer Turbomaschine die Voraussetzung für das Verfahren besprochen, bevor es für die Navier-Stokes Gleichungen angewendet wird.

Harmonic Balance hatte seine Anfänge in der Strukturmechanik und der Signaltechnik. Die relevante Korrelation zwischen beiden Fachgebieten ist das Auftreten von periodischen Schwingungsphänomenen, was gleichzeitig die Voraussetzung für das Verfahren ist. Insbesondere die Strömung in Turbomaschinen weist ebenfalls einen periodischen Charakter auf, was die Möglichkeit eröffnet, als Alternative zu Zeitbereichsverfahren, Harmonic Balance in Strömungslöser zu integrieren. Motiviert ist dieses Vorgehen nach Hall, [15], aufgrund einer Reduzierung der Simulationsdauer um mindestens ein bis zwei Größenordnungen im Vergleich zu herkömmlichen Zeitbereichsverfahren.

Als Einschränkung des Verfahrens sei betont, dass lediglich eingeschwungene Strömungsphänomene dargestellt werden können, d.h. transiente Vorgänge, wie z.B. der Startvorgang einer Turbomaschine, der von einer sich ändernden Drehzahl geprägt ist, kann nicht simuliert werden. Da insbesondere die drehzahlkonstanten Betriebspunkte einer Turbomaschine optimiert werden, kann hier Harmonic Balance eingesetzt werden, um effizienter als Zeitbereichsverfahren aussagekräftige Ergebnisse zu liefern.

Turbulenz ist aufgrund seiner chaotischen Natur nicht-periodisch. Mit skalenauflösenden Verfahren wie DNS und LES werden die turbulenten Schwankungsgrößen berechnet. D.h. speziell in Grenzschichten ist das Frequenzspektrum dieser Fluktuationen breit gefächert, was Harmonic Balance nur durch eine Betrachtung vieler Fundamentalfrequenzen und ihrer Harmonischen wiedergeben könnte. Nach Ashcroft, [3], verliert das Verfahren allerdings mit steigender Anzahl an betrachteten Frequenzen seinen Vorteil der Rechenzeitreduzierung, sodass der Einsatz von Zeitbereichsverfahren für DNS und LES sinnvoller ist.

Hingegen müssen aufgrund der Skalentrennung bei der statistischen Turbulenzmodellierung keine kleinskaligen Fluktuationen simuliert werden. Die makroskopischen Änderungen einer zeitgemittelten Strömung kann mit wenigen Frequenzen dargestellt werden, worin der Vorteil von Harmonic Balance gegenüber Zeitbereichsverfahren liegt. Demnach ist das Frequenzbereichsverfahren für die Anwendung bei den RANS-Gleichungen geeignet.

Abschließend sei darauf aufmerksam gemacht, dass das in dieser Arbeit behandelte Harmonic Balance Verfahren die Nichtlinearität der Navier-Stokes Gleichungen bewahrt. Im Vergleich zur linearisierten Variante nach Hall, [15], müssen deshalb nicht Instationaritäten als sehr klein angenommen werden und es können nichtlineare Kopplungen dargestellt werden.

2.5.1. Voraussetzung - Periodizität des Strömungsfeldes

Turbomaschinen weisen ein periodisches Strömungsfeld auf, da einerseits zeitliche als auch räumliche Periodizität auftritt. Ausgehend von der Rotation einer Passage (P_n) mit der Winkelgeschwindigkeit (Ω) innerhalb einer Rotorstufe (vgl. Abb. 2.6) lässt sich die zeitabhängige Wiederholung der Strömungszustände (q) zeigen. Wird eine zeitkonstante Störung an der aktuellen Position

von P_n eingebracht, dann wiederholt sich der Vorgang nach einer Umdrehungsdauer $T = 2\pi/\Omega$.

$$\underline{q}(\underline{x}, t) = \underline{q}(\underline{x}, t + T) \quad (2.39)$$

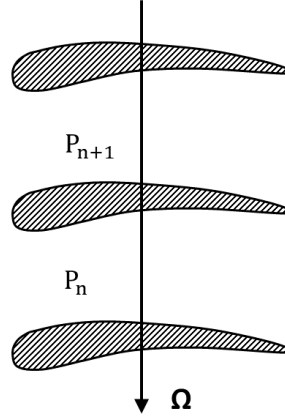


Abb. 2.6.: Schematische Darstellung eines Ausschnitts einer Rotorstufe von einem Triebwerk.

Analog dazu lässt sich die räumliche Periodizität zeigen. Die Störung in Passage (P_n) tritt ebenfalls nach einer Zeitspanne (ΔT) in der nachfolgenden Passage (P_{n+1}) auf. Folglich kann man über den Abstand zweier aufeinanderfolgender Passagen (\underline{G}) die räumliche Periodizität ausgedrückt werden.

$$\underline{q}(\underline{x} + \underline{G}, t) = \underline{q}(\underline{x}, t + \Delta T) \quad (2.40)$$

Hierbei ergibt sich der Zeitversatz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Passagen (ΔT) aus der Umdrehungsdauer und der Anzahl an Schaufeln (N) in einer Stufe: $\Delta T = T/N$.

Darstellung des Strömungszustandes als komplexe Fourier-Reihe

Es wurde mit der zeitlichen und räumlichen Periodizität (2.39) und (2.40) gezeigt, dass das Strömungsfeld von der Rotationsfrequenz (f) der Turbomaschine bzw. ihren Vielfachen abhängt. Somit kann man den Strömungszustand mit der Fundamentalfrequenz ($\omega = 2\pi/f$) und dem Vielfachen der Grundfrequenz, $k \in \mathbb{Z}$, als komplexe Fourier-Reihe darstellen.

$$\underline{q}(\underline{x}, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\underline{q}}_k(\underline{x}) e^{j\omega k t} \quad (2.41)$$

Es ist anzumerken, dass in diesem Abschnitt die Periodizität anhand des Beispiels einer Turbomaschine erläutert wurde. Jedoch ist die Anwendung des Verfahrens keinesfalls auf Turbomaschinen beschränkt. Es muss lediglich die Voraussetzung der Periodizität im Strömungsfeld gewährleistet sein.

2.5.2. Harmonic Balance - Navier-Stokes Gleichungen

Harmonic Balance ist in der numerischen Strömungsmechanik eine effiziente Alternative zu konventionellen Zeitintegrationsschemata. Dabei wird die numerische Integration in der Zeit durch eine Fourier-Transformation umgangen, sodass man im Frequenzbereich ein stationäres Problem zu lösen hat. Aus diesem Grund ist Ausgangspunkt der folgenden Betrachtung die semi-diskrete Form der Navier-Stokes Gleichungen (2.27), welche aus Gründen einer verbesserten Lesbarkeit hier nochmal aufgeführt wird.

$$\frac{d}{dt}\underline{q} + \underline{R}(\underline{q}) = \underline{0} \quad (2.42)$$

Der Ansatz von Harmonic Balance ist die Darstellung der Erhaltungsgleichungen als Fourier-Reihe, d.h. es wird eine Formulierung für den Vektor der Erhaltungsgrößen sowie der Residuentерme benötigt.

In der Praxis ist es ausreichend die Reihe (2.43) mit einer endlichen Anzahl (K) von Harmonischen der Fundamentalfrequenz zu approximieren. Hierbei sei mit $\hat{\underline{q}}_k$ der Vektor der Fourier-Koeffizienten der k -ten Harmonischen gekennzeichnet, während die Fundamentalfrequenz (f) über $\omega = 2\pi/f$ in die Reihe eingeht.

Zieht man zusätzlich in Betracht, dass es sich bei dem zu berechnenden Strömungszustand um eine reellwertige Größe handelt, muss das Ergebnis der komplexen Fourier-Reihe wiederum reell sein.

$$\underline{q}(\underline{x}, t) \approx \Re \left\{ \sum_{k=-K}^K \hat{\underline{q}}_k e^{j\omega k t} \right\} \quad (2.43)$$

Außerdem genügt es für reelle Fourier-Reihe die positiven Frequenzen auszuwerten, da der Fourier-Koeffizient einer negativen Frequenz gleich dem komplex konjugierten Koeffizient (\hat{q}_k^*) der entsprechenden positiven Frequenz ist: $\hat{q}_{-k} = \hat{q}_k^*$.

$$\underline{q}(\underline{x}, t) \approx \Re \left\{ \sum_{k=0}^K \hat{\underline{q}}_k e^{j\omega k t} \right\} \quad (2.44)$$

Analog dazu erhält man mit dem Vektor der Fourier-Koeffizienten des Residuum ($\widehat{\underline{R}}_k$) der k -ten Harmonischen die Reihe, um das Residuum darzustellen.

$$\underline{R}(\underline{q}(\underline{x}, t)) \approx \Re \left\{ \sum_{k=0}^K \widehat{\underline{R}}_k(\underline{q}) e^{j\omega k t} \right\} \quad (2.45)$$

Setzt man die Reihendarstellung des Zustands (2.44) und des Residuums (2.45) in das semi-diskrete System (2.42) ein und löst analytisch die Zeitableitung, erhält man die voll-diskrete Harmonic Balance Formulierung der Navier-Stokes Gleichungen.

$$\sum_{k=0}^K (jk\omega \hat{q}_k + \widehat{\underline{R}_k(\underline{q})}) e^{j\omega k t} = \underline{0} \quad (2.46)$$

Unter Verwendung der Orthogonalitätsbeziehung der Exponentialfunktion wird ersichtlich, dass zusätzlich zu der gesamten Summe, jeder Summand des Systems (2.46) dem Nullvektor entsprechen muss. Dementsprechend erhält man für k -te Frequenz ein Gleichungssystem für $k = \{0, \dots, K\}$.

$$jk\omega \hat{q}_k + \widehat{\underline{R}_k(\underline{q})} = \underline{0} \quad (2.47)$$

Ausgehend von einer Initialisierung aller Fourier-Koeffizienten der Erhaltungsgrößen (\hat{q}_k), gestaltet sich eine direkte Berechnung der Koeffizienten des Residuums als problematisch. McMullen, [23], veröffentlichte dazu eine Methode (siehe Abb. 2.7), welche vorsieht mithilfe einer iDFT die Erhaltungsgrößen im Zeitbereich zu rekonstruieren ($\underline{q}(t)$), anschließend auf konventionelle Art und Weise (vgl. 2.3.1) das Residuum ($\underline{R}(\underline{q}(t))$) auszuwerten und schließlich mit einer DFT die Koeffizienten der Residuen (\hat{R}_k) zu berechnen.

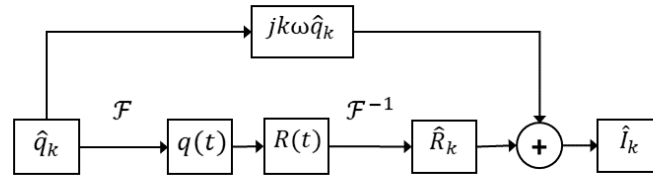


Abb. 2.7.: Schematische Darstellung des Vorgehens zur Berechnung des Fourierkoeffizienten des Residuums ausgehend von den Koeffizienten der Erhaltungsgrößen nach McMullen, [23].

Das Vorgehen zur Berechnung der Residuenkoeffizienten nach McMullen lässt sich mithilfe von DFT (\mathcal{F}) und iDFT (\mathcal{F}^{-1}) zusammenfassen.

$$\underbrace{jk\omega \hat{q}_k + \mathcal{F}\left\{\underline{R}(\mathcal{F}^{-1}\{\hat{q}_k\})\right\}}_{\hat{I}_k} = \underline{0} \quad (2.48)$$

Analog zur volldiskreten Darstellung der Erhaltungsgleichungen durch ein Zeitbereichsverfahren (2.30), liegt ein nichtlineares Gleichungssystem für jedes k vor. Folglich kann ebenfalls das Pseudozeitverfahren angewendet werden, um iterativ die Residuen ($\hat{\underline{I}}_k$) dem Nullvektor anzunähern und dadurch die Lösung für die Fourier-Koeffizienten zu erhalten.

$$\frac{d\hat{\underline{q}}_k}{d\tau} = \hat{\underline{I}}_k \quad (2.49)$$

Somit ist der Ablauf für das nichtlineare Frequenzbereichsverfahren, Harmonic Balance, vollständig beschrieben.

Fehlerquellen bei Harmonic Balance

Gleichfalls wie bei einer DFT (vgl. Abs. 2.4) können bei Harmonic Balance spektrale Leckeffekte und Aliasing auftreten. Um die erste Problematik aufzugreifen, ist nach Frey, [11], darauf zu achten die Länge des Zeitsignals so zu wählen, dass mindestens die Schwebefrequenz, welche aus Überlagerung der Einzelfrequenzen entsteht, aufgelöst wird.

Aliasing kann bei Harmonic Balance auftreten, selbst wenn die höchste betrachtete Frequenz nach Nyquist ausreichend abgetastet wird. Grund dafür ist die Nichtlinearität des Residuums. Dadurch entstehen Frequenzen, welche außerhalb der Auswahl aus Fundamentalfrequenz und einer endlichen Anzahl (K) von Harmonischen liegt.

Im Anhang C ist dieser Effekt anhand der Burgers Gleichungen veranschaulicht. Nach Orzag, [27], kann Aliasing bei quadratischen Termen mit $N \geq 3K + 1$ Abtastpunkte unterbunden werden. Da im Residuum der Navier-Stokes Gleichungen auch andere Nichtlinearitäten wie z.B. kubische Terme auftreten, werden $N \geq 4K + 1$ Abtastpunkte verwendet, wodurch die höchste betrachtete Frequenz fünf mal abgetastet wird.

2.6. Prozesskette

Die Simulationen in dieser Arbeit wurden alle mit dem Strömungslöser TRACE Version 9.2.351, welcher vom DLR am Institut für Antriebstechnik in erster Linie für Strömungen in Turbomaschinen entwickelt wird, durchgeführt. TRACE ist für dreidimensionale, strukturierte und unstrukturierte Netze ausgelegt, die parallel als Multi-Blöcke bearbeitet werden können. Es besteht die Möglichkeit stationäre und instationäre Problemstellungen zu simulieren, wobei hierfür zusätzlich zu konventionellen Zeitbereichsverfahren Harmonic Balance implementiert ist. Außerdem handelt es sich nach Becker, [4], um einen kompressiblen Strömungslöser, der in der statistischen Turbulenzmodellierung auf den Favre- und Reynolds-gemittelten Navier-Stokes Gleichungen basiert.

Die allgemeine Prozesskette bei den Simulationen in dieser Arbeit ist in Tabelle 2.2 zusammengefasst. Dabei unterteilt sich der Gesamtprozess in I: Netzgenerierung, II: Konfiguration, III: Berechnung, IV: Nachbearbeitung und V: Visualisierung.

Bei den verwendeten Programmen: PyMesh, PREP, TRACE und POST handelt es sich um Entwicklungen des Instituts für Antriebstechnik basierend auf der Programmiersprache C, wobei PyMesh die Sprache Python benutzt. Die graphische Oberfläche zur Konfiguration der CFD-Simulation, GMC⁹, wird von der MTU bereitgestellt. Bei Tecplot handelt es sich um eine kommerzielle Darstellungssoftware, während die Funktionsbibliothek von Python zur Visualisierung, Matplotlib, öffentlich zugänglich ist.

Tab. 2.2.: Darstellung der Prozesskette bei den Simulationen in dieser Arbeit, ausgehend von der Erstellung eines Rechnernetzes bis hin zur Darstellung der Berechnungsdaten

I: Netzgenerierung	II: CFD-Setup	III: Berechnung	IV: Nachbearbeitung	V: Visualisierung
-PyMesh	-GMC -PREP	-TRACE	-POST -Pythonskripte	-Tecplot 360 -Matplotlib

I: Netzgenerierung

Die räumlichen Rechengitter für diese Arbeit wurden unter Benutzung des strukturierten Netzgenerators PyMesh erstellt. Der allgemeine Ablauf sieht es vor, in einem ersten Schritt die Geometrie des Rechengebiets bezüglich eines kartesischen Koordinatensystem zu erstellen. Anschließend wird das Rechengebiet in Kontrollvolumina unterteilt, wobei sich im Kontext dieser Arbeit auf Hexaeder beschränkt wird.

⁹engl. General Mesh Connector

Bei der Unterteilung des Rechengebiets ist auf die Netzqualität zu achten. Nach Kistner, [20], sind dafür drei Faktoren maßgebend.

- Verscherung (engl. Skewness)
- Expansionsrate (engl. Stretching)
- Dehnung (engl. Aspect ratio)

Die Verscherung ist ein Maß für die Abweichung zur Rechtwinkligkeit an den Eckpunkten bzw. Knoten der Kontrollvolumina. Im optimalen Fall ist der Winkel zwischen allen Linien, die in einem Knoten zusammenlaufen 90° , was für Hexaeder direkt erfüllt ist.

Die Expansionsrate beschreibt das Wachstum zwischen benachbarten Zellen. D.h. bei einer vereinfachten eindimensionalen Betrachtung soll Δx_i die Zellgröße beschreiben, folglich erhält man die Expansionsrate als $\Delta x_{i+1}/\Delta x_i$. Die Theorie der finiten Differenzen, welche Grundlage der Diskretisierung ist, geht von äquidistanten Schrittweiten zwischen den Zellen aus, d.h. $\Delta x_{i+1}/\Delta x_i = 1$. Durch die Anwendung einer Taylorreihe, kann der Diskretisierungsfehler abgeschätzt werden. Da Abweichungen von einer äquidistanten Schrittweite einen zusätzlichen Fehler verursachen, sind Expansionsraten nahe Eins zu wählen.

Bei der Dehnung handelt es sich um das Verhältnis der größten zur kleinsten Seitenfläche eines Kontrollvolumens und ist abhängig von der Zellform und der Strömungssituation zu wählen. Für detailliertere Informationen sei auf die genannte Literatur verwiesen.

Ein weiteres wichtiges Merkmal, welches bei der Unterteilung des Rechengebiets beachtet werden muss, ist der dimensionslose Wandabstand (y^+). An reibungsbehafteten Wänden bildet sich eine Grenzschicht aus. Entsprechend der FVM ist für die Zelle an der Wand jedoch nur der Zustand am Zellmittelpunkt bekannt. Für die Berechnung der Wandschubspannung (τ_w), die auf das Fluid wirkt und in die Impulserhaltung eingeht, wird allerdings der normale Geschwindigkeitsgradient ($\partial u/\partial y_w$) auf der Wand benötigt.

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y_w} \Big|_{y_w=0} \quad (2.50)$$

Folglich braucht man ein Modell, welches den Geschwindigkeitsverlauf über den Wandabstand (y_w) bis zum Zellmittelpunkt vorhersagt (vgl. Abb. 2.8).

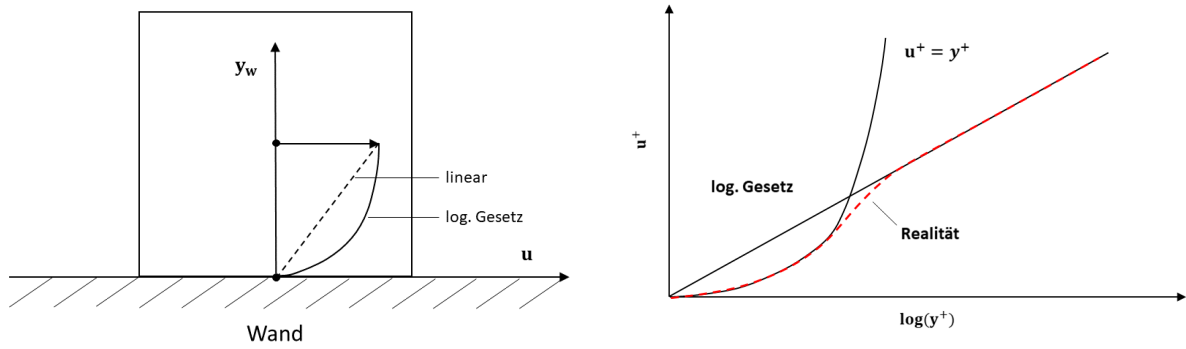


Abb. 2.8.: Linearen und logarithmischen Modellierung des Geschwindigkeitsprofils bei einer ersten Wandzelle (links) und Graph der beiden Modelle (rechts) mit dimensionslosen Größen für Geschwindigkeit und Wandabstand (reproduziert nach Versteeg, [41]).

In turbulenten Grenzschichten unterscheidet man in der Regel zwischen zwei Modellen, die von dem dimensionslosen Wandabstand (y^+) und der dimensionslosen Geschwindigkeit (u^+) abhängen. Für deren Bestimmung benötigt man neben Dichte und dynamischer Viskosität die Schubspannungsgeschwindigkeit (u_τ), die zeitgemittelte Geschwindigkeit (\bar{u}) parallel zur Wand und den Wandabstand (y_w).

$$y^+ = \frac{y_w u_\tau \rho}{\mu}, \quad u^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau}, \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (2.51)$$

Nach Spalding, [35], befindet sich eine Zelle an der Wand in der viskosen Unterschicht, wenn $y^+ < 5$ gilt. In diesem Bereich erhält man für das Modell einen linearen Zusammenhang. Hingegen gilt für $30 < y^+ < 200$ das logarithmische Wandgesetz (vgl. Abb. 2.8).

$$\begin{aligned} u^+ &= y^+ & : y^+ < 5 \\ u^+ &= 2,5 \ln(y^+) + 5,5 & : 30 < y^+ < 200 \end{aligned} \quad (2.52)$$

Aus Abbildung 2.8 ist zu erkennen, dass in einem Zwischenbereich, der sogenannten Pufferschicht, beide Modelle ungenaue Vorhersagen für die Realität liefern, weshalb dieser Bereich gemieden werden sollte.

II: CFD-Setup

Als Vorbereitung für die Berechnung mit TRACE muss ein Strömungsfeld auf dem Rechengitter initialisiert werden. Zusätzlich werden an den äußeren Grenzen des Rechengebiets Randbedingungen benötigt. Im Rahmen dieser Arbeit werden folgende Randbedingungen relevant: Fernfeld, periodische Ränder, viskose Wände, reibungsfreie Wände, Einstrom- und Ausstromränder. Für Erklärungen dazu sei auf die Literatur von Blazek, [5], verwiesen.

Des Weiteren werden Einstellungen bezüglich Gasmodell, Viskositätsmodell und Wärmeleitfähigkeit getroffen. Das zentrale Element einer numerischen Strömungssimulation ist die Verfahrensauswahl für den Strömungslöser. In Tabelle 2.3 sind die geläufigsten Möglichkeiten mit TRACE für das implizite Lösungsverfahren, die räumliche und zeitliche Diskretisierung aufgeführt. Die Auswahl der raumbezogenen Methoden beschränkt sich hierbei auf strukturierte Netze.

Tab. 2.3.: Übersicht der numerischen Verfahren in TRACE

Anwendungsgebiet		Lösungsverfahren	
Räumliche Diskretisierung	Ableitung im viskosen Fluss	Euler-Verfahren	1. Ordnung
		Zentrale Differenzen	2. Ordnung
	Rekonstruktion der Zustände mit Roe-TVD ¹⁰	Upwind	1. Ordnung
		MUSCL-Fromm ¹¹	2. und 3. Ordnung
Zeitliche Diskretisierung		Implizit Euler	1. und 2. Ordnung
		Crank Nicolson	1. und 2. Ordnung
		Exp./Imp. Runge-Kutta	1. bis 4. Ordnung
Frequenzdiskretisierung		Harmonic Balance	
Implizites nichtlineares Gleichungssystem		Dual-Time-Stepping	+ Predictor Corrector
			+ Gauss Seidel

An dieser Stelle sind die minimalen Voraussetzungen zum Start einer Simulation erfüllt. Zur Verdeutlichung der beschriebenen Konfigurationen sei auf den Anhang D und H verwiesen. Exemplarisch kann hier anhand zweier Testfälle die Auswahl nachvollzogen werden.

Hinzuzufügen ist noch, dass Abbruchkriterien für die iterativen Lösungsverfahren definiert werden müssen. In der Regel unterscheidet man zwischen einem statischen Abbruchkriterium durch die Angabe von Iterationsschritten und einem variablen Kriterium durch die Angabe eines Abbruchresiduums.

Da während einer Berechnung zu jedem Iterationsschritt für jede Gleichung und jede Zelle ein Residuum vorliegt, haben sich Normen durchgesetzt, welche aus der Vielzahl von Residuen einen repräsentativen Wert pro Schritt generieren. Man unterscheidet zwischen der L_1 -Norm, der L_2 -Norm und der L_{max} -Norm. Nach Ferziger, [9], ist die L_1 -Norm als die Summe der Absolutwerte, die L_2 -Norm als den RMS¹² und die L_{max} -Norm als das Maximum der vorliegenden Residuen definiert.

¹⁰Nach Becker, [4]: Riemannlöser von Roe unter Verwendung von TVD (engl. Total Variation Diminishing)

¹¹MUSCL-Schema nach Fromm, [12]

¹²engl. Root Mean Square

Durch Parallelisierung einer Simulation kann die gesamte Berechnungszeit erheblich reduziert werden, d.h. das Rechengebiet wird in Blöcke unterteilt, die auf mehreren Rechenkernen parallel abgearbeitet werden. Wenn diese Unterteilung nicht bereits während der Netzerstellung durch PyMesh vorgesehen wird, kann nachträglich mit dem „preprocessing“ Programm PREP vor dem Start einer Simulation unterteilt werden.

III: Berechnung

Abhängig von der Größe des zu berechnenden Falls werden Simulationen auf lokalen Rechnern oder in Rechenzentren durchgeführt. Dabei ist die Größe in erster Linie durch die Anzahl von Zellen festgelegt, die für die räumliche Diskretisierung genutzt wurden. Aber auch Faktoren wie die Anzahl der Zeitschritte bzw. die Zeitschrittgröße, die Wahl der Ordnung der numerischen Verfahren und die Anzahl an iterativen Schritten bzw. das gewählte Residuum haben einen Einfluss.

Während der Berechnung kann durch die kontinuierliche Ausgabe von Daten der Simulationsverlauf überwacht werden. An dieser Stelle ist es üblich die Residuen zu überwachen, da anhand des Residuenverlaufs, auch Konvergenzverlauf genannt, abgeschätzt werden kann, ob eine Simulation konvergiert. Konvergenz meint in diesem Kontext, dass der Residuenverlauf sich asymptotisch einem Grenzwert annähert und somit die Fehler iterativ kleiner werden. Durch die Überwachung der Simulation hat man die Möglichkeit für z.B. divergierende Lösungen die Berechnung frühzeitig zu unterbrechen.

IV: Nachbearbeitung

Strömungslöser berechnen eine numerische Lösung der Erhaltungsgleichungen, d.h. es werden Strömungsfelder produziert, die aus Zustandsvektoren für die einzelnen Zellen bestehen. Jedoch werden in den meisten Anwendungsfällen sogenannte abgeleitete Größen benötigt. Vertreter dieser Größen sind z.B.: Auftriebsbeiwert, Wandschubspannung, Massenstrom, Totaldruck oder Wirbelstärke. Für die Berechnung dieser Größen ist in der Prozesskette mit TRACE das „postprocessing“ Programm POST das übliche Tool.

Da die Implementierung von Harmonic Balance im Vergleich zu den Zeitbereichsverfahren relativ jung ist, deckt POST jedoch nicht alle in dieser Arbeit benötigten Funktionalitäten ab. Aus diesem Grund wurden eigene Pythonskripte erstellt, um z.B. den Auftriebsbeiwert oder den Phasenwinkel aus Frequenzbereichsdaten zu extrahieren.

V: Visualisierung

Die Visualisierung ist ein zentrales Element der Auswertung und Präsentation der berechneten Daten. Im Rahmen dieser Arbeit beschränkt sich die Darstellung der Simulationsergebnisse auf Tabellen, Balken-, Linien- und zweidimensionalen Konturdiagrammen. Wobei entsprechend der Aufzählreihenfolge der qualitative Charakter der Darstellung steigt und gleichzeitig die gezeigte Datenmenge.

3. Laminare Umströmung eines Zylinders

Kreisförmige Zylinder werden in einer Vielzahl von technischen Anwendungen mit einem Fluid umströmt. Da die Geometrie zwar einfach ist, jedoch aber die Strömungsphänomene komplex sein können und zu strukturellen Schäden führen können, wurden die Zylinderumströmung in der Vergangenheit eingehend untersucht. Exemplarisch sei das „Galopping“ von Hochspannungskabel im Wind nach Hucho, [18], oder die Umströmung von Fabrikkaminen nach Sockel, [34], zu nennen. Daraus ergibt sich ein akademischer Charakter des Testfalls, da die strömungsmechanischen Vorgänge bereits weitestgehend verstanden sind. Allerdings eignet sich der Testfall aus diesem Grund besonders gut zur Anwendung neuer numerischer Verfahren, da Vorgänge wie Ablösung, Turbulenz und Instationaritäten mit einer massiven Datenmenge validiert werden können.

3.1. Physikalische Grundlagen und empirische Modelle

Die Geometrie eines kreisförmigen Zylinders lässt sich vollständig mit dem Durchmesser (D) und der Länge (L) beschreiben (vgl. Abb. 3.1).

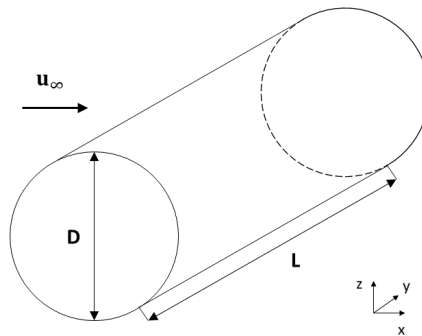


Abb. 3.1.: 3D-Skizze eines kreisförmigen Zylinders.

Unter Betrachtung der Anströmgeschwindigkeit (u_∞), der Dichte (ρ_∞), der dynamischen Viskosität (μ) und der Wahl des Durchmesser als charakteristische Länge, ergibt sich die Reynolds-Zahl für den Zylinder.

$$Re = \frac{\rho_\infty u_\infty D}{\mu} \quad (3.1)$$

Nach Zdravkovich, [47], lassen sich in Abhängigkeit von der Reynolds-Zahl unterschiedliche Strömungsphänomene am Zylinder beobachten. Der erste Bereich liegt bei $0 < Re < 5$ und ist charakterisiert durch eine vollständig am Zylinder anliegende Strömung. Es treten keine zeitlichen Änderungen auf, d.h. das Strömungsbild ist stationär.

Eine Erhöhung der Reynolds-Zahl bis ca. 50 führt dazu, dass sich die Strömung an der strömungsabgewandten Seite ablöst. Es bildet sich eine symmetrische Ablöseblase aus, die aus zwei gegenläufig rotierenden Wirbel besteht. Das Strömungsbild ist größtenteils stationär, wobei bei Annäherung an $Re = 50$ die Ablöseblase beginnt, instabil zu werden.

Der nächste Bereich befindet sich bei $50 < Re < 200$. Aufgrund der gestiegenen Instabilitäten beginnt die Ablöseblase periodisch zu schwingen und die Instabilitäten wachsen an. Infolgedessen lösen sich gegenläufige rotierende Wirbel aus dem Ablösegebiet ab, die im Anschluss daran vom Zylinder weg transportiert werden. Die Frequenz, mit der das Ablösegebiet schwingt bzw. die Wirbel ausgesendet werden, wird als Wirbelablösefrequenz (f) bezeichnet. In diesem Zusammenhang ist es üblich eine dimensionslose Kennzahl, die Strouhal-Zahl (Sr), zu definieren.

$$Sr = \frac{f D}{u_\infty} \quad (3.2)$$

Die periodisch ablösenden Wirbel sind nach ihrem Entdecker als die Kármánsche Wirbelstraße benannt. Es sei darauf hingewiesen, dass in diesem Bereich die Strömung laminar ist und es sich daher um eine laminare Kármánsche Wirbelstraße handelt.

Eine weitere Erhöhung der Reynolds-Zahl führt zu einem laminar-turbulenten Umschlag, der im Nachlauf des Zylinders beginnt ($200 < Re < 260$). Für eine weitere Steigerung der Reynolds-Zahl nähert sich die Position des Umschlags dem Zylinder an, bis der Umschlag bereits in der Grenzschicht des Zylinders stattfindet.

In der Vergangenheit hatte sich eine Vielzahl von Wissenschaftler damit auseinandergesetzt, eine Kopplung zwischen den Anströmbedingungen und der Ablösefrequenz zu finden. Einer der ersten war Roshko, [31]. Sein Modell war allerdings auf seine experimentellen Daten angepasst und versagte beim Vergleich mit Messergebnissen aus anderen Aufbauten.

Infolgedessen erkannte Williamson, [45], den Zusammenhang zwischen der Länge (L) des Zylinders und der Frequenz. In seinen Experimenten beobachtete er eine Schiefwinkeligkeit zur Längenrichtung des Zylinders in den abgelösten Wirbeln. Seine Visualisierungen mit fluoreszierenden Partikeln offenbarten unterschiedliche Pfeilungen der zusammenhängenden Wirbel für variierende Zylinderlängen. Damit hatte er eine Gesetzmäßigkeit für den Einfluss der Längenrichtung auf die Ablösefrequenz gefunden.

Durch die Messung der Schräge der Ablösemuster gelang es ihm mit einer Transformation den Effekt der Pfeilung zu eliminieren, was einem parallel zum Zylinder laufenden Ablösemuster entspricht. Indem er die Enden des Zylinders modifizierte, sodass sich im Experiment ein paralleles Ablösemuster einstellte und diese Messdaten mit den transformierten Daten verglich, erhielt er die Bestätigung für die Funktionsweise seiner Transformation.

Dadurch hat er den Einfluss der Längenrichtung zu eliminiert, was einer zweidimensionalen Betrachtung des Zylinders entspricht. Infolgedessen erstellte er ein empirisches Modell für das parallele Ablöseverhalten im 2D-Fall, welches in Kombination mit seiner Transformation gute Übereinstimmung mit dreidimensionalen Experimenten zeigte.

Aufbauend auf der Arbeit von Williamson veröffentlichte Fey, [10], eine Erweiterung des empirischen Modells, welches nicht nur auf den Re -Bereich der laminaren Kármánschen Wirbelstraße begrenzt ist. Dieses Modell findet im Rahmen dieser Arbeit Anwendung. Die aufgeführte Gleichung 3.3 besitzt Gültigkeit für den Bereich: $47 < Re < 180$.

$$Sr = 0,2684 - \frac{1,0356}{\sqrt{Re}} \quad (3.3)$$

An dieser Stelle sei eine wichtige Eigenschaft der laminaren Kármánschen Wirbelstraße herausgestellt. Nach Williamson, [46], weist diese Wirbelstraße ein periodisches Verhalten auf. Verdeutlicht wird diese Eigenschaft durch ein entsprechendes Spektrum (siehe Abb. 3.2).

Es ist zu erkennen, dass das Signal nahezu diskrete Maxima aufweist. Dabei liegt die erste Spitze bei der Ablösefrequenz von ca. 0,15Hz, während sich die höherfrequenten Maxima bei Vielfachen dazu befinden. Somit kann das Signal als eine Reihe von harmonischen Schwingungen beschrieben werden und ist damit periodisch.

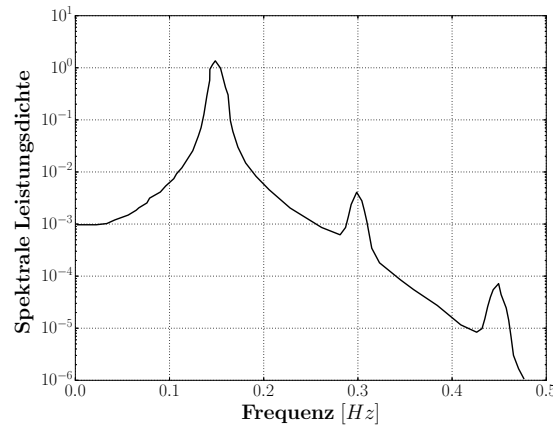


Abb. 3.2.: Typisches Spektrum einer laminaren Kármánschen Wirbelstraße eines Zylinders (reproduziert nach Karnidakis, [19]).

Die Periodizität motiviert zur Anwendung von Harmonic Balance, da die Voraussetzung eines periodischen Schwingungsverhalten erfüllt ist (vgl. Abs. 2.5.1). Zusätzlich lässt sich die Fundamental- bzw. Ablösefrequenz anhand von einem empirischen Modell abschätzen, sodass das Verfahren mit dieser Frequenz aufgesetzt werden kann.

3.2. Generierung einer Datenbasis mit Zeitbereichssimulationen für Harmonic Balance

Der Zweck dieses Abschnitts ist es Referenzdaten für die folgenden Untersuchungen mit Harmonic Balance zu generieren. Aus diesem Grund ist es wichtig, die Glaubhaftigkeit der Ergebnisse darzulegen. Um dieser Notwendigkeit nachzukommen, soll einerseits in der Verifikation gezeigt werden, dass die zugrundeliegenden Gleichungen korrekt gelöst werden und andererseits soll durch den Vergleich mit experimentellen Daten gezeigt werden, dass die Physik der strömungsmechanischen Phänomene richtig abgebildet wird.

3.2.1. Numerisches Setup

Geometrie und Strömungsbedingungen

Für die Wahl des Zylinderdurchmessers müssen die Reynolds- und Mach-Zahl mit einbezogen werden. Durch die Forderung nach einer laminaren Kármánschen Wirbelstraße (vgl. Abs. 3.1) ist der Bereich für die Reynold-Zahl vorgegeben: $50 < Re < 200$. Bei der Mach-Zahl ist zu beachten, dass es sich bei TRACE um einen kompressiblen Löser handelt. Nach Viozat, [42], nimmt für diese Art von Löser mit fallender Mach-Zahl die iterative Konvergenzgeschwindigkeit und die Genauigkeit ab.

Um dieses Problem zu vermeiden, liegt die kleinste betrachtete Mach-Zahl bei 0,161. Unter Einbeziehung der ISA¹-Standardbedingungen für Luft erhält man daraus den Durchmesser zu $D = 2 \cdot 10^{-5} \text{m}$.

Zur Bestimmung der Mach-Zahlen ist es sinnvoll eine Definition in Abhängigkeit von der Re anzugeben. Hierbei wird die Anströmgeschwindigkeit (u_∞), der Isentropenexponent (κ), die Dichte (ρ_∞), Druck (p_∞) und kinematische Viskosität (μ) benötigt. Letztere erhält man aus dem Modell von Sutherland (2.9) zu $\mu = 1,79 \cdot 10^{-5} \text{Pa s}$.

$$Ma = \frac{u_\infty}{\sqrt{\kappa \frac{p_\infty}{\rho_\infty}}} = \frac{Re \mu}{D \sqrt{\kappa p_\infty \rho_\infty}} \quad (3.4)$$

Zum Zwecke der Nachvollziehbarkeit enthält die folgende Tabelle 3.1 die betrachteten Reynolds-Zahlen, Mach-Zahlen und Anströmgeschwindigkeiten.

Tab. 3.1.: Auflistung der betrachteten Reynolds-, Mach-Zahlen und der Anströmgeschwindigkeit für die Simulationen des Zylinders.

Re in $[-]$	75	100	125	150	175
Ma in $[-]$	0,161	0,215	0,269	0,323	0,377
u_∞ in $[m/s]$	54,9	73,2	91,5	109,8	128,1

¹Internationale Standardatmosphäre

Im vorigen Abschnitt 3.1 wurde erläutert, dass der Einfluss der Längenausdehnung eines Zylinders vernachlässigt werden kann, da schräge Wirbelabströmmuster auf parallele Muster zurückgeführt werden können. Diese Feststellung motiviert den Zylinder zweidimensional zu betrachten, um Rechenzeit sparen.

Rechennetz und Randbedingungen

Realisiert wird die zweidimensionale Betrachtung durch eine einzelne Zellschicht in Längenrichtung. Hingegen der Möglichkeit reibungsfreie Wände für die Begrenzung des Gebiets einzusetzen, werden periodische Ränder benutzt.

Das Rechengebiet ist im Vergleich zum Zylinder um den Faktor 200 größer. Eine Darstellung dazu ist mit Abbildung 3.3 gegeben, wobei der Zylinder sich im Ursprung des Koordinatensystems befindet. Grund dafür ist, dass Wellen, welche vom Zylinder infolge der Wirbelablösung ausgesendet werden, durch numerische Dissipation auf dem Weg zum Rand des Rechengebiets gedämpft bzw. eliminiert werden sollen. Zusätzlich dazu besteht die Möglichkeit durch ein erhöhtes Zellwachstum in radialer Richtung die numerische Dissipation zu steigern. Allerdings kommt diese Variante hier nicht zum Einsatz.

Der Hintergrund für die eingesetzte numerische Dämpfung ist zum einen die Anwendung von Fernfeldrandbindungen am äußeren Rand des Rechengebietes und zum anderen soll eine Reflektion von Wellen am Rand des Rechengebietes vermieden werden. Letzteres könnte das Ablöseverhalten bzw. die Ablösefrequenz am Zylinder beeinflussen, was kritisch hinsichtlich der Untersuchung von Harmonic Balance ist, da es von der Ablösefrequenz abhängt.

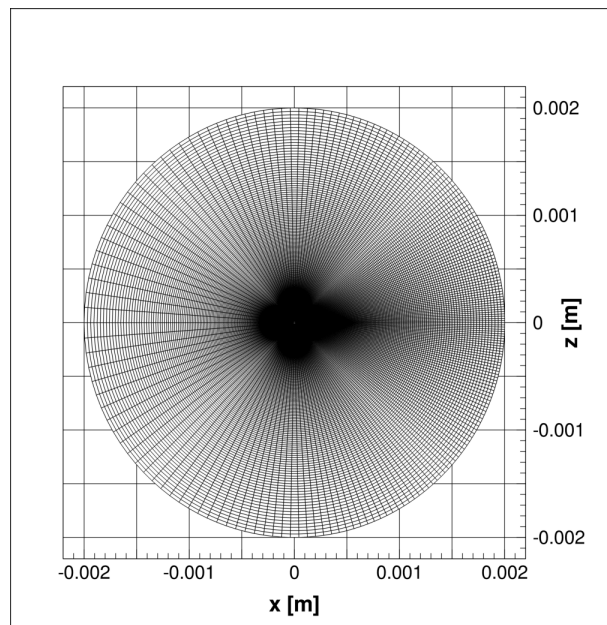


Abb. 3.3.: Rechennetz des Zylinders für die Simulationen im Zeit- und Frequenzbereich.

In Umfangsrichtung ist das Zellwachstum so gewählt, dass eine erhöhte Zelldichte im Nachlauf des Zylinders entsteht. Die hohe Auflösung ist hier erwünscht, um die abgelösten Wirbel möglichst ohne Dämpfung darstellen zu können.

An der Zylinderwand ist die erste Zellgröße so gewählt, dass $y^+ < 1$ gewährleistet wird und dadurch das wandaufgelöste Modell (2.52) an der viskosen Wand eingesetzt wird.

Zusammenfassend besteht das vollständige Rechengebiet aus 200 Zellen in Umfangsrichtung und 256 in Radialrichtung, was insgesamt 51200 Zellen entspricht.

Konfigurationen des Strömungslösers

In diesem Abschnitt wird auf die wesentlichsten Einstellungen von TRACE, die einer Erklärung bedürfen, eingegangen. Eine vollständige und detaillierte Auflistung ist im Anhang D zu finden.

Die instationären Simulationen mit Zeitbereichsverfahren sind mit stationären Vorrechnungen initialisiert, die ein Konvergenzlevel von $L_1 \approx 4 \cdot 10^{-5}$ aufweisen.

Da die Simulationen im Zeitbereich als Referenz für folgende Berechnungen mit Harmonic Balance dienen sollen, findet ein Zeitbereichsverfahren mit hoher Genauigkeitsordnung Anwendung: Implizites Runge-Kutta-Verfahren, 3. Ordnung. Die Vorgabe des Zeitschrittes dafür ist in TRACE aufgrund der hauptsächlichen Anwendung bei Turbomaschinen speziell. Über die Angabe einer Frequenz und einer Anzahl an Zeitschritten pro Periode dieser Frequenz werden die Zeitschritte definiert.

Es ist daher sinnvoll das empirische Modell von Fey (3.3) zu nutzen, um die Ablösefrequenz des Zylinders in Abhängigkeit von Re abzuschätzen und als Eingabe zu nutzen. In allen betrachteten Fällen wird eine konstante Anzahl von Zeitschritten benutzt: 128, womit die 6. Harmonische nach Nyquist mit vier Abtastpunkten ausreichend dargestellt werden kann.

Bei instationären Simulationen bietet sich für den iterativen Löser ein variables Abbruchkriterium an, damit pro physikalischem Zeitschritt effizient die notwendige Anzahl an Iterationen benutzt wird. Aus diesem Grund ist die maximale Anzahl an Löschritten ausreichend groß gewählt und ein Abbruchkriterium von $L_1 = 10^{-6}$ vorgegeben. In diesem Kontext kann noch die CFL^2 -Zahl, welche die Schrittweite einer Iteration festlegt, mit $CFL = 50$ angegeben werden.

Abschließend sei darauf hingewiesen, dass im betrachteten Re -Bereich keine Turbulenz zu erwarten ist, deshalb werden keine Modelle zur Turbulenzmodellierung benutzt.

²Courant-Friedrichs-Lewy

3.2.2. Verifikation

Es wurde bereits erwähnt, dass es notwendig ist die Glaubwürdigkeit der Simulationsergebnisse mit dem Zeitbereichsverfahren darzulegen. Im Zuge dessen werden zuerst repräsentative Zielparameter definiert, die anschließend in Verifikation und Validierung benutzt werden.

Zielparameter

Um die Güte einer Simulation zu bewerten, ist es hilfreich physikalische Größen zu betrachten. In dieser Arbeit konzentrieren sich die Auswertungen auf den Auftriebsbeiwert (c_L). Zusammengesetzt ist dieser Wert aus der senkrecht zur Anströmung stehenden Auftriebskraft (F_L), der projizierten Fläche (A_p) und dem Staudruck ($\rho_\infty u_\infty^2/2$).

$$c_L = \frac{F_L}{\frac{\rho_\infty}{2} u_\infty^2 A_p} \quad (3.5)$$

Im weiteren Verlauf ist das Zeitsignal des Auftriebsbeiwerts für eine Simulation mit $Re = 100$ dargestellt (siehe Abb. 3.4). Das Signal zeigt nach einer transienten Startphase für $t \gtrsim 2,5 \cdot 10^{-5}$ s ein eingeschwungenes Verhalten, wie es für eine Kármánsche Wirbelstraße zu erwarten ist. Ausgehend von einer Periodizität des Signals liegt es nahe, das Signal mit einer Frequenz und der Amplitude zu definieren. Da die Amplitude des Signals allerdings kleinen Schwankungen unterzogen ist, wird auf den RMS³ des Signals zurückgegriffen.

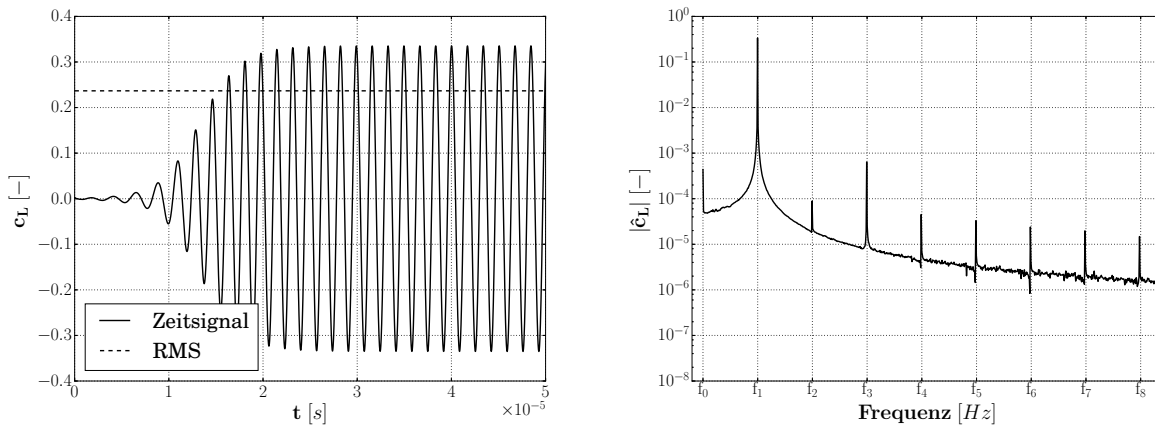


Abb. 3.4.: Zeitschrieb des Auftriebsbeiwerts am Zylinder bei $Re = 100$ (links) und das entsprechende Frequenzspektrum des eingeschwungenen Signals (rechts).

Zur Ermittlung der Frequenzen des Signals wird für den eingeschwungenen Teil eine DFT durchgeführt. Hierbei wird eine Signallänge von ca. der 50-fachen Periodenlänge der Ablösefrequenz betrachtet, um eine ausreichende Auflösung im Frequenzbereich zu gewährleisten. Außerdem ist der spektrale Leckeffekt durch die Kürzung des Signals auf ein Vielfaches der Periodenlänge

³engl. Root Mean Square

minimiert. Mit dem Betrag des Fourier-Koeffizienten des Auftriebsbeiwerts ($|\hat{c}_L|$) ergibt sich dann das Spektrum (siehe Abb. 3.4).

Aus der spektralen Darstellung des Signals erkennt man den periodischen Charakter. Die Beiträge von $|\hat{c}_L|$ liegen zu diskreten Frequenzen vor, welche ganzzahlige Vielfache voneinander sind. Dabei lässt sich die k -te Harmonische (f_k) in Abhängigkeit von der Fundamentalfrequenz (f_1) definieren: $f_k = k \cdot f_1$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Es sei darauf hingewiesen, dass die dominante 1. Harmonische bzw. Fundamentalfrequenz der Ablösefrequenz des Zylinders entspricht.

Somit hat man mit der Ablösefrequenz (f_1) und dem RMS des Auftriebsbeiwerts ($c_{L,RMS}$) zwei Parameter, um das periodische Ablöseverhalten am Zylinder zu charakterisieren.

Diskretisierungsfehler

Bei den Simulationen im Zeitbereich unterscheidet man zwischen einem Fehler aufgrund der räumlichen und zeitlichen Diskretisierung. Um diese Fehler zu analysieren, wird im Folgenden exemplarisch das Setup bei $Re = 100$ betrachtet.

Für die Darstellung des räumlichen Diskretisierungsfehlers wird ausgehend von dem zuvor beschriebenen Rechnetz mit 51200 Zellen, sukzessive die Anzahl der Zellen um 25% der ursprünglichen Anzahl verringert bzw. erhöht und anschließend der Auftriebsbeiwert ausgewertet. Trotz einer Reduzierung der Zellanzahl, wird $y^+ < 1$ in allen Rechnetzen gewährleistet. Dadurch sollen Ungenauigkeiten aus dem Wandmodell vermieden werden, um möglichst unverfälscht den räumlichen Diskretisierungsfehler auszuwerten.

Zum Aufzeigen des zeitlichen Diskretisierungsfehlers wird die Anzahl der Zeitschritte pro Periode um den Faktor 2 verändert. Aufgrund der gleichbleibenden Frequenz bzw. Periode entspricht dieses Vorgehen der Halbierung bzw. Verdopplung des Zeitschrittes zwischen zwei Diskretisierungsleveln.

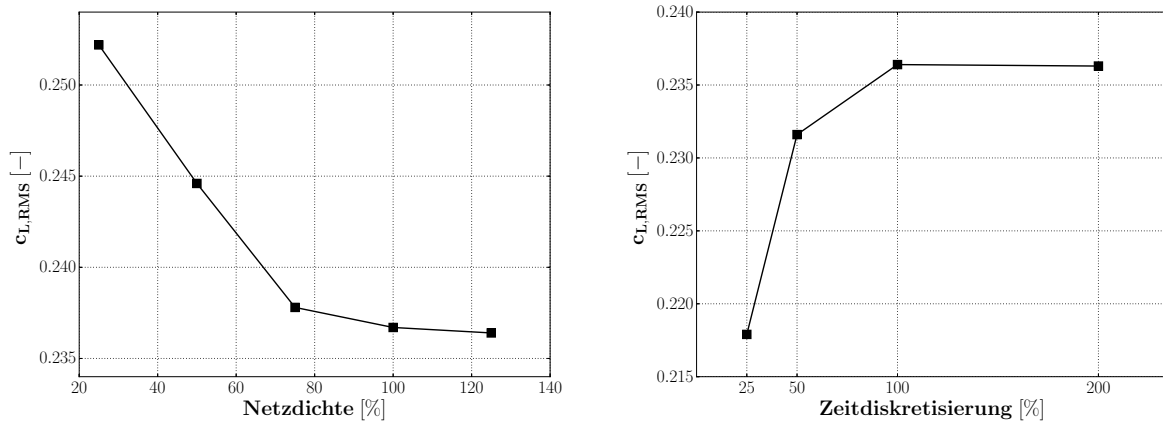


Abb. 3.5.: Auftriebsbeiwert als repräsentativer Parameter für die Lösungsqualität bei unterschiedlichen räumlichen und zeitlichen Diskretisierungsleveln.

Die Ergebnisse des beschriebenen Vorgehens sind in Abbildung 3.5 aufgetragen. In Raum und Zeit erhält man für kleinere Schrittweiten, d.h. mehr Zellen bzw. mehr Zeitschritte pro Periode, eine asymptotische Annäherung des Auftriebsbeiwertes an einen Grenzwert, d.h. der Diskretisierungsfehler nimmt ab.

Da man einen Kompromiss zwischen Genauigkeit und Rechenaufwand finden muss, wird festgelegt, dass für den Fall mit 51200 Zellen (100%) und 128 Zeitschritten (100%) pro Periode die Genauigkeit der Lösung ausreichend ist. Folglich werden diese Diskretisierungslevel bei den nachfolgenden Untersuchungen verwendet.

Iterative Konvergenz

Die Lösungsqualität sowie der Rechenaufwand sind direkt an das Residuum gekoppelt. Deshalb werden in diesem Abschnitt unterschiedliche Residuen bezüglich ihres Einflusses auf den Auftriebsbeiwert betrachtet.

Aus Abbildung 3.6 ist zu erkennen, dass sich mit fallendem Residuum der Auftrieb einem Grenzwert annähert. Allerdings handelt es sich nicht wie zuvor um eine asymptotische Annäherung. Geht man davon aus, dass der Wert für ein L_1 -Residuum von 10^{-7} nahezu der optimale Wert ist, ergibt sich aus dem Verlauf, dass die Abweichungen zu diesem Wert mit fallendem Residuum ebenfalls sinken.

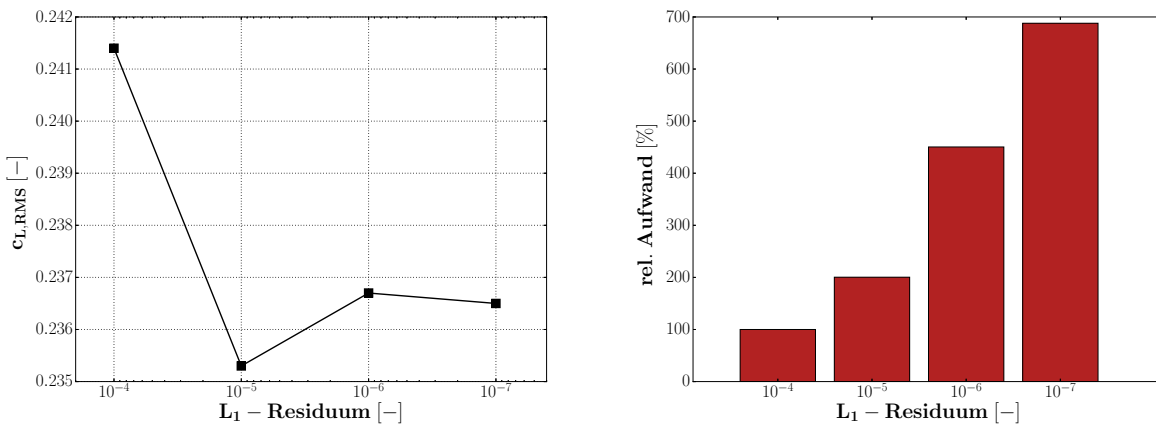


Abb. 3.6.: Einfluss des iterativen Abbruchkriteriums (L_1 -Residuum) auf die Genauigkeit (links) und die Rechenzeit (rechts).

Der Genauigkeit gegenüber steht der Aufwand. Dafür enthält die Abbildung den relativen Aufwand bezüglich der benötigten Rechenzeit für ein L_1 -Residuum von 10^{-4} . Dabei sei darauf aufmerksam gemacht, dass es mit dem Setup nicht möglich ist, das Level von 10^{-7} zu erreichen, da das Lösungsverfahren die maximale Anzahl an Iterationen vorher erreicht. Aus diesem Grund ist der Anstieg der Rechenzeit von 10^{-6} auf 10^{-7} geringer als es der Trend des Graphen vermuten lässt.

Mit fallendem Level werden die Berechnungen zeitintensiver. Erneut geht man einen Kompromiss zwischen Genauigkeit und Aufwand ein, indem man die Ergebnisse für ein L_1 -Residuum von 10^{-6} als ausreichend genau definiert.

Rundungsfehler

Der Effekt einer limitierten Darstellungsgenauigkeit von Zahlen wird als Rundungsfehler bezeichnet. TRACE bietet die Möglichkeit Strömungsgrößen als eine Gleitkommazahl mit 32 Bit (engl. single) oder mit 64 Bit (engl. double) zu behandeln. Exemplarische Rechnungen bei $Re = 100$ zeigen keinen Einfluss auf die gewählte Darstellungsgenauigkeit des Auftriebsbeiwertes mit drei Nachkommastellen. Folglich ist es legitim, den Speicheraufwand zu reduzieren und mit dem Datentyp „single“ zu rechnen.

3.2.3. Validierung

Nachdem die Simulationsergebnisse verifiziert sind, soll nun hier durch den Vergleich mit anderen wissenschaftlichen Arbeiten geprüft werden, ob die strömungsmechanischen Vorgänge korrekt wiedergegeben werden.

Für den Vergleich der Ablösefrequenz des Zylinders werden die experimentellen Daten von Williamson, [45], und die Simulationsergebnisse von Kociok, [21], benutzt. In Abbildung 3.7 sind die dimensionslosen Ablösefrequenzen (Sr) für die einzelnen Simulationen im Bereich von $70 < Re < 180$ aufgetragen. Zur Entdimensionalisierung dieser Daten sei auf Tabelle 3.1 verwiesen.

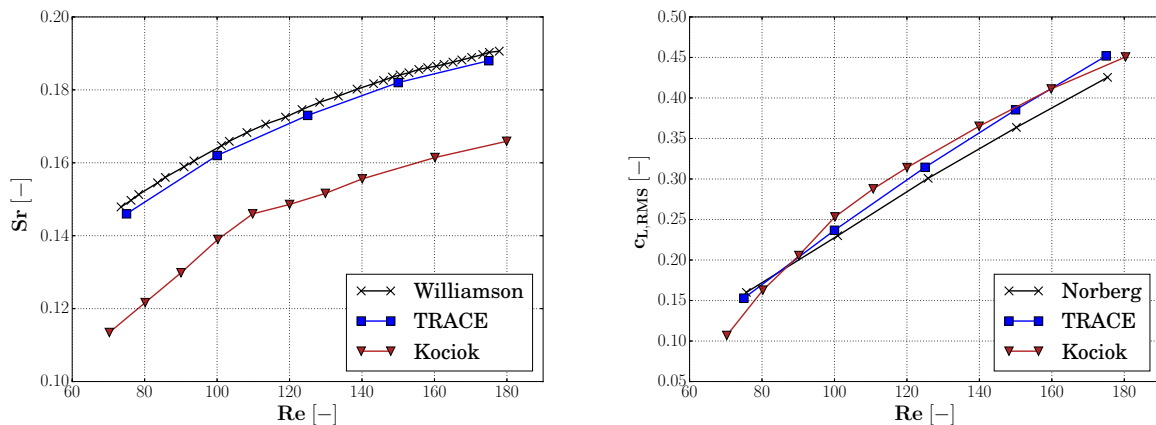


Abb. 3.7.: Vergleich der berechneten dimensionslosen Ablösefrequenz (Sr) mit den Ergebnissen von Williamson und Kociok (links) und Gegenüberstellung des simulierten Auftriebsbeiwerts mit den Daten von Norberg und Kociok (rechts).

Qualitativ liegen die im Rahmen dieser Arbeit berechneten Frequenzen (bezeichnet mit: TRACE) über alle betrachteten Re nahe an den experimentellen Daten. Dem gegenüber stehen deutliche Abweichungen beim Vergleich mit den Strouhal-Zahlen von Kociok.

Um die Unterschiede zu quantifizieren, sind die relativen Abweichungen zum Experiment als Minimal- und Maximalwert (Δ_{min} und Δ_{max}) in der Tabelle 3.2 angegeben. Darüber hinaus ist die Reynolds-Zahl des entsprechenden Vergleichs aufgeführt.

Bezüglich des Auftriebsbeiwerts werden die Daten aus der Veröffentlichung von Norberg, [26], verwendet (siehe Abb. 3.7). Visuell sind speziell die Ergebnisse bei niedrigen Reynolds-Zahlen fast deckungsgleich mit dem Auftrieb von Norberg, wohingegen für steigende Re die Abweichungen anwachsen. Es ist anzumerken, dass für beide Datensätze ein linearer Zusammenhang zu erkennen ist.

Die Ergebnisse von Kociok weisen ebenfalls eine gute Übereinstimmung mit Norberg auf. Allerdings ist ein linearer Zusammenhang nicht zu erkennen. Zieht man die relativen Abweichungen zu den Auftriebsbeiwerten von Norberg aus Tabelle 3.2 hinzu, erhält man sowohl die größten als auch die kleinsten Unterschiede bei Kociok.

Tab. 3.2.: Auflistung der minimalen und maximalen Relativabweichungen. Bei der Frequenz in Bezug auf die Daten von Williamson und für den Auftriebsbeiwert bezogen auf die Daten von Norberg.

	Frequenz		Auftriebsbeiwert	
	TRACE	Kociok	TRACE	Kociok
Δ_{min} in [%]	1,1	15,6	0,9	0,5
bei Re in [–]	100	110	75	90
Δ_{max} in [%]	4,2	19,9	6,2	11,7
bei Re in [–]	75	70	175	110

Diskussion der Validierung

Um eine Erklärung für die großen Frequenzabweichungen von Kociok aufzuzeigen, ist es vorteilhaft, dass seine wissenschaftliche Arbeit ebenfalls wie diese Arbeit am Institut für Antriebstechnik des DLRs unter Zuhilfenahme von TRACE erstellt wurde. Somit können die numerischen Setups direkt verglichen werden.

Es ist auffällig, dass die Simulationen von Kociok bei Mach-Zahlen in einer Größenordnung von 10^{-2} durchgeführt wurden, während in dieser Arbeit der Wert um eine Größenordnung darüber liegt. Wie bereits in Abschnitt 3.2.1 erwähnt, haben kompressible Strömungslöser mit sinkender Mach-Zahl zum einen Konvergenzprobleme und zum anderen sinkt die Qualität der Strömungslösung. Anhand des Vergleichs der Strömungsbilder aus dieser Arbeit bei $Re = 100$ und einer wiederholten Simulation des entsprechenden Setups von Kociok wird der schadhafte Einfluss der niedrigen Mach-Zahl ersichtlich (siehe Abb. 3.8).

In der Abbildung ist die Wirbelstärke zur Identifizierung von Wirbeln dargestellt. Diese Größe ist als die Rotation des Geschwindigkeitsfelds definiert. Da in der 2D-Betrachtung des Zylinders dieses Feld sich auf eine x - und eine z -Komponente reduziert, ergibt sich die Wirbelstärke als Skalar (ω).

$$\omega = \text{rot}(\underline{u}) = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.6)$$

Zusätzlich zur Wirbelstärke sind in der Abbildung Stromlinien aufgeführt, da aufgrund des unterschiedlichen Wertebereichs von ω ein direkter Vergleich zu fehlerhaften Interpretationen führen kann.

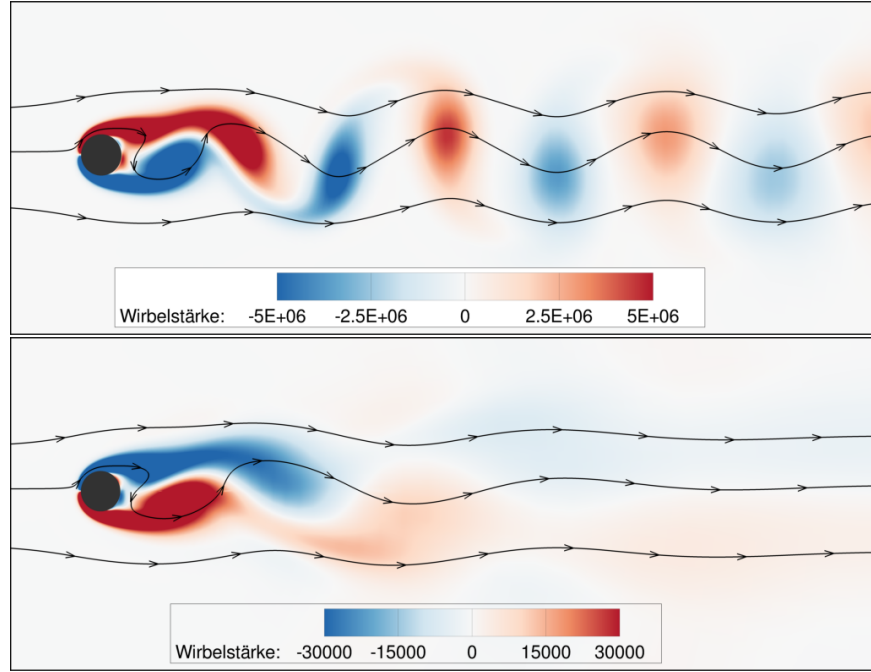


Abb. 3.8.: Darstellung der Kármánschen Wirbelstraße bei $Re = 100$ mithilfe der Wirbelstärke und Stromlinien für die Simulationen aus dieser Arbeit (oben) und die Ergebnisse von Kociok (unten)

Das Strömungsbild zeigt, dass bei Kocioks Simulation die Krümmung der Stromlinien im Nachlauf näher am Zylinder nachlassen. Unter Einbeziehung der Wirbelstärke ergibt sich, dass bei Kociok die Wirbel bereits nahe am Zylinder gedämpft werden, sodass sich die Wirbelstraße nicht vollständig entwickeln kann, was zu einer reduzierten Ablösefrequenz führt.

Durch eine Modifikation des in dieser Arbeit verwendeten numerischen Setups hin zur gleichen Mach-Zahl, die von Kociok verwendet wurde, kann ein ähnlich schadhafter Effekt nachgewiesen werden. Bei $Re = 100$ und $Ma = 0,02$ stellt sich eine Strouhal-Zahl von 0,98 ein. Somit ist der Trend zu unterschätzen Ablösefrequenz im Kontext von niedrigen Strömungsgeschwindigkeiten nachgewiesen.

Ein weiterer Aspekt in der Diskussion der Ergebnisse sind die Abweichungen in den Ablösefrequenzen der Simulationen dieser Arbeit und den Experimenten von Williamson. Eine Fehlerquelle dafür ist, dass keine Machähnlichkeit vorliegt.

Im Experiment ergeben sich für ISA-Standardbedingungen Mach-Zahlen in der Größenordnung von 10^{-3} , wohingegen die Simulationen im Bereich von 10^{-1} sind.

Den Einfluss der Mach-Zahl auf die Ablösefrequenz des laminar umströmten Zylinders zeigt Canuto in seiner Veröffentlichung, [6]. Die relevanten Ergebnisse sind in Abbildung 3.9 zusammengefasst. Es ist für die betrachteten Reynoldszahlen (50, 75 und 100) der Trend zu erkennen, dass die Strouhal-Zahl mit steigender Mach-Zahl fällt, was eine Erklärung für die niedrigeren in dieser Arbeit berechneten Frequenzen im Vergleich zu den Daten von Williamson ist. Allerdings lassen sich die Abweichungen damit nicht vollständig darlegen, da die Frequenzen (TRACE) immer noch unterhalb den korrigierten Werten von Canuto liegen.

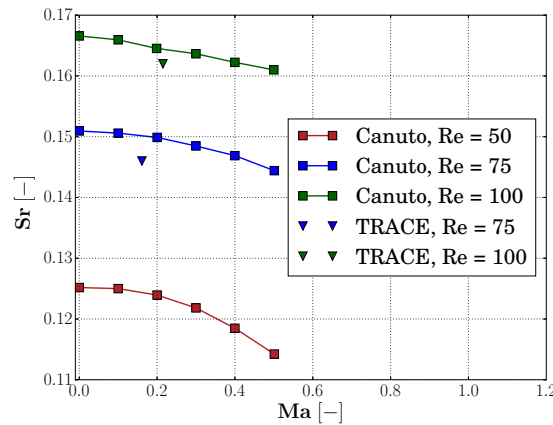


Abb. 3.9.: Einfluss der Mach-Zahl auf die Strouhal-Zahl bei der laminaren Umströmung eines Zylinders (reproduziert nach Canuto, [6]).

Eine weitere mögliche Fehlerquelle könnte in der Extraktion der Frequenz aus dem Spektrum, welches mittels DFT erstellt wird, liegen. Der spektrale Leckeffekt und die diskrete Frequenzdarstellung, können hier zu Ungenauigkeiten führen. Allerdings kann damit nicht der Trend erklärt werden, dass die hier berechneten Frequenzen kontinuierlich unterhalb den experimentellen Vergleichswerten liegen. Deshalb wird vermutet, dass der letzte Beitrag zu den Abweichungen aus numerischen Ungenauigkeiten kommt.

Abschließend wird kurz auf die Diskrepanz bezüglich der Auftriebsbeiwerte eingegangen. Es ist erstaunlich, dass trotz der erhöhten Abweichungen bei der Ablösefrequenz die Daten von Kociok nahe an den Daten von Norberg liegen. Hingegen lässt sich der Trend, dass die Differenz zwischen dem Auftriebsbeiwert aus dieser Arbeit und den Daten von Norberg mit steigender Reynoldszahl wächst, mit Turbulenz erklären. Für $Re = 200$ findet der laminar-turbulente Umschlag im Nachlauf des Zylinders statt. Es liegt somit nahe, dass bereits bei niedrigeren Reynoldszahlen dreidimensionale turbulente Effekte eintreten, die mit einer 2D Simulation ohne Turbulenzmodellierung nicht abgebildet werden können und deshalb einen zu großen Auftriebsbeiwert liefern.

3.3. Untersuchung von Harmonic Balance

Das Ziel in diesem Abschnitt ist es, die zuvor formulierte Leitfrage dieser Arbeit (vgl. Abs. 1) für den Zylinder zu beantworten. Die Methodik dafür sieht es vor, die verifizierten und validierten Ergebnisse aus Zeitbereichsverfahren mit unterschiedlichen Konfigurationen von Harmonic Balance zu vergleichen. Dabei stellen die Daten aus Simulationen im Zeitbereich den Richtwert dar, da es nach Ashcroft, [3], in Anwendungsfällen der Anspruch von Harmonic Balance ist, die Genauigkeit von zeitlich hoch aufgelösten Zeitbereichsverfahren zu erreichen.

Bei den Untersuchungen von Harmonic Balance werden die Vergleiche für eine Zylinderumströmung bei $Re = 100$ angestellt, da hierfür bezüglich der Ablösefrequenz die beste Übereinstimmung mit den experimentellen Daten vorliegt.

3.3.1. Numerisches Setup mit Harmonic Balance

In Bezug auf die allgemeine Prozesskette mit TRACE (siehe Abs. 2.6) müssen vor dem Start einer Simulation die Netzgenerierung sowie die Konfigurationen behandelt werden. Die Vernetzung sowie die räumlichen Verfahren können aus der vorigen Simulation (vgl. Abs. 3.2.1) übernommen werden. Allerdings werden bezüglich Harmonic Balance einige Änderungen benötigt.

Der Theorie der Frequenzbereichsmethode zufolge (vgl. Abs. 2.5.2) wird für die Diskretisierung des Frequenzbereichs die Fundamentalfrequenz (f_1) des zu erwartenden periodischen Phänomens sowie eine Auswahl von Harmonischen benötigt. Die Auswahl kann mit dem Parameter $k \in \mathbb{Z}$ getroffen werden, wobei $f_k = k f_1$ eine beliebige Harmonische kennzeichnet. Die Gesamtheit aller betrachteter Frequenzen wird als harmonisches Set bezeichnet. Es sei vermerkt, dass die 0. Harmonische ($k = 0$) enthalten sein sollte, da ansonsten die zeitgemittelte Strömungslösung exkludiert wird.

Es ist notwendig eine Anzahl von Abtastpunkte für das Zeitsignal vorzugeben, da zur Berechnung des Residuums die Methode nach McMullen (vgl. Abb. 2.5.2) zum Einsatz kommt und daher die Lösung mithilfe einer iDFT im Zeitbereich rekonstruiert werden muss. Dafür wird in allen Simulationen die Periodendauer zur höchste auftretende Frequenz fünfmal abgetastet.

Des Weiteren benötigt das Verfahren eine Initialisierung. Wenn im weiteren Verlauf der Arbeit keine näheren Angaben gemacht werden, wird ein Strömungsfeld mit konstanten Werten genutzt. Mit dem Ziel eines homogenen Strömungsfelds entsprechen diese Werte den Fernfeldrandbedingungen bei einer ISA-Standardatmosphäre. Aus den Anfangswerten des Strömungsfelds berechnet TRACE die Fourier-Koeffizienten der Zustände der 0. Harmonischen ($\hat{q}_{k=0}$), während die verbleibenden Harmonischen mit Nullen initialisiert werden. Den initialen Vektor aller Zustände von allen Harmonischen erhält man dann zu:

$$\hat{\underline{q}} = \begin{bmatrix} \hat{q}_{k=0} \\ \underline{0} \\ \vdots \\ \underline{0} \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Da analog zum Zeitbereichsverfahren ein implizites Gleichungssystem gelöst wird, werden Parameter für das Lösungsverfahren benötigt. Im Gegensatz zum Zeitbereichsverfahren wird hier der iterative Löser bis zum Erreichen einer maximalen Schrittzahl von 15000 betrieben. Dabei können konvergente Residuenverläufe für $CFL = 10$ erreicht werden. Im Anhang D findet sich eine detaillierte Auflistung des numerischen Setups.

3.3.2. Einfluss einer Unsicherheit bei der Fundamentalfrequenz

Der Erfolg von Harmonic Balance hängt stark von der Frequenzdiskretisierung ab. Maßgebend ist diese Diskretisierung von der Wahl der Fundamentalfrequenz abhängig. Es gilt deshalb in diesem Abschnitt zu klären in wie weit die initiale Fundamentalfrequenz von Harmonic Balance mit der physikalischen Frequenz übereinstimmen muss, um ein konvergierendes Verfahren zu erhalten und welche Auswirkungen bezüglich der Lösungsqualität zu erwarten sind. Außerdem wird eine Methode zur Erhöhung der Lösungsqualität bei Unsicherheiten in der Fundamentalfrequenz vorgestellt.

In dieser Arbeit liegen zwar die Ablösefrequenzen aus Zeitbereichsverfahren vor, allerdings ist die Berechnung der physikalischen Fundamentalfrequenz über eine Zeitbereichssimulation unsinnig, da dadurch die Motivation für das Verfahren, Rechenzeit einzusparen, verloren geht. Aus diesem Grund wird zuerst ein empirisches Modell zur Abschätzung der Frequenz benutzt. Anschließend wird von dem Fall ausgegangen, dass kein empirisches Modell vorliegt, d.h. es werden künstliche breitgefächerte Abweichungen betrachtet.

3.3.2.1. Modellvorhersage

Eine Abschätzung für die dimensionslose Ablösefrequenz bei $Re = 100$ für das Harmonic Balance Verfahren erhält man aus dem Modell von Fey (3.3). Durch die Entdimensionalisierung der Strouhal-Zahl mit $D = 2 \cdot 10^{-5} \text{m}$ und $u_\infty = 73,22 \text{m/s}$ ergibt sich dann die Fundamentalfrequenz zu: $f_1 = 603479 \text{Hz}$. In den Simulationen dieses Abschnitts werden vier Harmonische berücksichtigt, d.h. das Set entspricht $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$.

Im Rahmen der Untersuchung wird zuerst ein repräsentativer Konvergenzverlauf der Frequenzbereichsmethode erläutert, anschließend wird ein qualitativer Vergleich des berechneten Strömungsfelds mit Äquivalent aus dem Zeitbereich angestellt und abschließend quantitativ der Auftriebsbeiwert mit dem Ergebnis aus dem Zeitbereichsverfahren gegenübergestellt.

Konvergenzverhalten

Im Graphen der Abbildung 3.10 ist das L_1 -Residuum der betrachteten Harmonischen zu einzelnen Iterationsschritten des impliziten Lösert aufgetragen. Vorab lässt sich festhalten, dass alle Harmonischen einen Zustand erreichen, in dem keine Änderungen im Residuum auftreten, was hier als Konvergenz bezeichnet wird.

Bevor der Verlauf näher beschrieben wird, ist es hilfreich über die Lösertschritte Intervalle zu definieren. Der Initialbereich (I) erstreckt sich von 0 – 500, die Anregungsphase (II) von 500 – 4500 und die Konvergenzphase (III) von 4500 – 15000.

Im Initialbereich fällt auf, dass sich das Residuum der zeitgemittelten Lösung zu Beginn des iterativen Lösungsverfahrens ca. vier Größenordnungen oberhalb der Residuen der höheren Harmonischen ($f_{k>0}$) befindet. Bis zum Ende des Bereichs ist ein steiles Abfallen von f_0 zu verzeichnen, während die Residuen der höheren Harmonischen ein gedämpftes oszillierendes Verhalten aufzeigen. Der darauffolgende Bereich (II) zeigt für die 0. Harmonische nach einem kurzen Anstieg zu Beginn einen monoton-fallenden Verlauf auf. Im Vergleich zu den Bereichen I und III ist hier die Steigung von f_0 am geringsten. Während die 0. Harmonische fällt, wird zuerst f_1 angeregt, sodass das Residuum bis zu einem Maximum am Ende des Bereichs ansteigt, während versetzt dazu das Gleiche erst für f_2 und dann für f_3 zu beobachten ist.

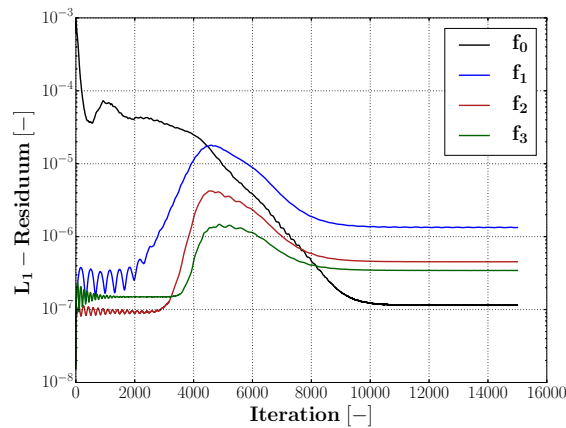


Abb. 3.10.: L_1 -Residuenverlauf bei einer Simulation der Zylinderumströmung mit Harmonic Balance bei der empirisch ermittelten Fundamentalfrequenz.

In der Konvergenzphase ist ein monotonies Fallen der Residuen aller Harmonischen zu betrachten, wobei f_0 im Vergleich zum vorigen Bereich eine erhöhte Steigung aufweist und verglichen mit den anderen Harmonischen das niedrigste Residuum bei ca. 10000 erreicht. Ausgehend vom Maximum, fallen die Residuen von f_1 , f_2 und f_3 bis zum Erreichen des konvergierten Zustandes bei ca. 10000. Die finalen Residuenlevel sind absteigenden nach der Reihenfolge ihrer Anregung geordnet, wobei das Level bei f_0 am niedrigsten ist. Es ist auffällig, dass das Residuum der dominanten Harmonischen (f_1) (vgl. Spektrum in Abb. 3.12) den größten Wert für das L_1 -Residuum aufweist.

Aus den beschriebenen Verläufen geht eine Kopplung zwischen dem Residuum der 0. Harmonischen und der höheren Harmonischen hervor. Ausgehend von der Theorie (vgl. Abs. 2.5.2) werden für jede Harmonische voneinander getrennte Systeme berechnet, allerdings sind die Koeffizienten der unterschiedlichen Harmonischen über die nichtlinearen Terme des Residuums gekoppelt, was im Anhang C anhand der Burgers-Gleichungen verdeutlicht wird. Dadurch wird verständlich, dass die zu Null initialisierten Beiträge der höheren Harmonischen mit fortschreitenden Iterationen durch die Beiträge von f_0 angeregt werden, sodass die Lösung instationär wird.

Qualitativer Vergleich

Für eine konvergierte Lösung wird in Abbildung 3.11 das Strömungsfeld im Nachlauf des Zylinders durch die Wirbelstärke dargestellt. Außerdem ist zusätzlich zu den Daten von Harmonic Balance das Äquivalent aus den Simulationen im Zeitbereich gegeben. Der visuelle Vergleich ergibt eine gute Übereinstimmung der beiden Strömungsfelder. Zum einen ähnelt sich die räumliche Struktur der Wirbel und zum anderen lässt die Farbgebung der Wirbelstärke auf vergleichbare Werte schließen.

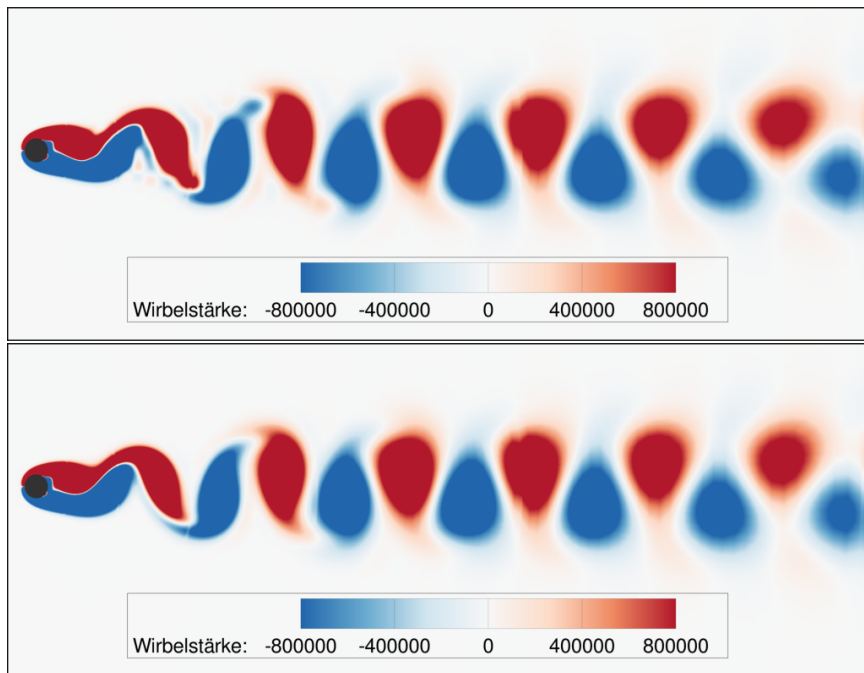


Abb. 3.11.: Visualisierung der Wirbelstraße im Nachlauf des Zylinders aus Harmonic Balance mit einer empirischen Fundamentalfrequenz (oben) und aus dem Zeitbereichsverfahren (unten).

Es sei darauf verwiesen, dass die Abbildungen nicht exakt denselben Zeitpunkt darstellen, weshalb aufgrund dieser Diskrepanz Abweichungen im Strömungsfeld vorhanden sein können. Da allerdings diese Daten lediglich für einen qualitativen Vergleich herangezogen werden, sind diese Abweichungen akzeptabel.

Kräfteberechnung im Frequenzbereich

Im weiteren Verlauf der Untersuchungen werden quantitative Vergleiche mit dem Auftriebsbeiwert aus den Zeitbereichsberechnungen durchgeführt. Außerdem werden die Spektren dieses Werts gegenübergestellt. Dafür werden im Rahmen dieser Arbeit eigenes erstellte Skripte genutzt, da in POST die Funktionalität diese Werte aus den Fourier-Koeffizienten einer Harmonic Balance Simulation zu berechnen nicht vorhanden ist. Aus Gründen der Nachvollziehbarkeit soll deshalb auf die Berechnung des Auftriebsbeiwerts im Zeit- und Frequenzbereich eingegangen werden.

Das Vorgehen in diesem Zusammenhang ist analog zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten des Residuums nach McMullen (vgl. Abb. 2.7).

Am Ende einer Simulation mit Harmonic Balance liegen die Zustände im Frequenzbereich vor (\hat{q}_k). Mittels einer iDFT (\mathcal{F}^{-1}) werden die Zustände im Zeitbereich rekonstruiert, dann das Zeitsignal des Auftriebsbeiwerts berechnet und schließlich mit einer DFT (\mathcal{F}) das Spektrum des Auftriebsbeiwerts ausgewertet.

$$(\hat{c}_L)_k = \mathcal{F}\{c_L(\mathcal{F}^{-1}\{\hat{q}_k\})\} \quad (3.8)$$

Für einen detaillierten Einblick in das Vorgehen wird davon ausgegangen, dass die Strömungslösung bereits mittels einer iDFT rekonstruiert im Zeitbereich vorliegt ($q^n = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{q}_k\}$). Hierbei kennzeichnet der Superskript „n“ die Zugehörigkeit zu einem diskreten Zeitpunkt.

Zu Beginn ist festzustellen, dass die Zeitabhängigkeit des Auftriebsbeiwerts durch die Auftriebskraft gegeben ist, da der Staudruck ($\frac{\rho_\infty}{2} u_\infty^2$) und die projizierte Fläche (A_p) Konstanten sind. Aus diesem Grund ist es hier ausreichend auf die Kräfteberechnung einzugehen.

Grundsätzlich setzen sich die auf einen Körper wirkenden Kräfte in einer reibungsbehafteten Strömung aus Druck- und Reibungskraft zusammen. Folglich wird der Druck (p_i^n) und die Wandschubspannung ($(\tau_w)_i^n$) eines jeden Flächenelements (A_i) des Zylinders zu den rekonstruierten Zeitpunkten benötigt.

Bei Druck und bei Wandschubspannung handelt es sich um Skalare, wohingegen Kräfte eine Orientierung haben. Deshalb wird die Druckkraft mit dem Normalenvektor senkrecht zu jeder Fläche gerichtet. Während die aus der Reibung resultierende Kraft ihre Ausrichtung durch den tangential zu jeder Fläche stehenden und normierten Geschwindigkeitsvektor erhält. Um den gesamten auf den Körper wirkenden Auftrieb zu einem diskreten Zeitpunkt zu erhalten, müssen die Teilkräfte über alle Flächen (I) des Körpers summiert werden. Es sei darauf verwiesen, dass im betrachteten Fall der Auftrieb in z -Richtung orientiert ist, deswegen ist es ausreichend jeweils die z -Komponente des Normalenvektors (n_z) und des tangentialen Einheitsvektors der Geschwindigkeit (t_z) zu berücksichtigen.

$$F_L^n = \sum_{i=1}^I (p \, n_z \, A)_i^n + (\tau_w \, t_z \, A)_i^n \quad (3.9)$$

Durch die Normierung der Auftriebskraft F_L^n mit Staudruck und projizierten Flächen ergibt sich schließlich der zeitliche Verlauf des Auftriebsbeiwerts (c_L). Wie zuvor in Gleichung (3.8) aufgeführt, erhält man schließlich mit einer DFT die Fourier-Koeffizienten des Auftriebsbeiwerts ($(\hat{c}_L)_k$).

Quantitativer Vergleich

Mit der zuvor beschriebenen Methodik erhält man aus der Simulation mit HB⁴ das Zeitsignal des Auftriebsbeiwerts am Zylinder (siehe Abb. 3.12). Für einen Abgleich sind zusätzlich die Daten aus der Berechnung im Zeitbereich aufgeführt und das gewählte Zeitintervall ist repräsentativ für den eingeschwungenen Zustand der laminaren Kármánschen Wirbelstraße des Zylinders.

Aus dem Verlauf wird ersichtlich, dass die Amplitude der Simulation im Zeitbereich größer ist als das Äquivalent aus Harmonic Balance. Die absoluten Werte dazu liegen in Tabelle 3.3 in Form des RMS-Wertes vor. Zwischen den beiden Verfahren beträgt die prozentuale Abweichung 1,7%.

Zieht man in Betracht, dass der Auftriebsbeiwert zum Zeitpunkt $t = 0$ beim selben Wert startet, ergibt sich für das Ende des Zeitsignals eine Verschiebung. Daraus folgt, dass die Periodenlänge bei Harmonic Balance kleiner ist und somit der Auftriebsbeiwert mit einer höheren Frequenz schwingt.

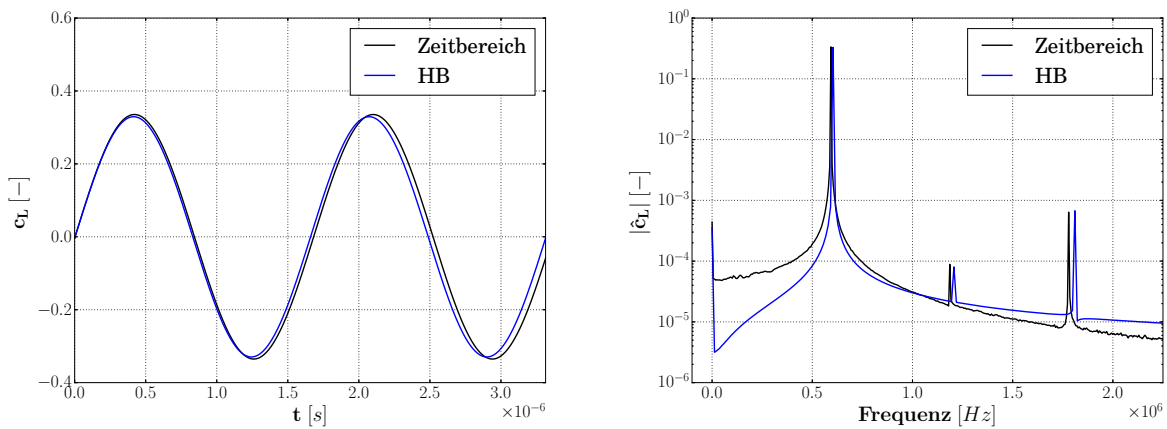


Abb. 3.12.: Zeitsignal (links) und Spektrum (rechts) des Auftriebsbeiwerts am Zylinder für eine Simulation im Zeit- und Frequenzbereich.

Für einen Frequenzvergleich bietet sich eine spektrale Analyse des Zeitsignals an (siehe Abb. 3.12). Dafür ist der Betrag des Fourier-Koeffizienten des Auftriebsbeiwerts über den Frequenzen aufgetragen.

Im dargestellten Bereich weisen beide Verfahren vier diskrete Maxima auf. Anhand der Verschiebung der Signalspitzen zwischen den beiden Verfahren ist die bereits festgestellte Frequenzabweichung bestätigt.

Aus der quantitativen Darstellung des Spektrums in der Tabelle 3.3 geht hervor, dass die Frequenz der dominanten ersten Harmonischen bei HB mit der Frequenz, mit der das Verfahren aufgesetzt wird, übereinstimmt. Aus dem Vergleich mit dem entsprechenden Wert aus der Zeitbereichssimulation ergibt sich, dass Harmonic Balance mit einer um 1,9% größeren Fundamentalfrequenz aufgesetzt ist. Der Graph des Spektrums zeigt darüber hinaus, dass die Abweichungen bei den höheren Harmonischen mit steigender Frequenz anwachsen.

Dazu weisen die Fourier-Koeffizienten der diskreten Signalspitze aus Harmonic Balance mit

⁴Harmonic Balance

Ausnahme der dominanten 1. Harmonischen große absolute Abweichungen ($|\Delta_{\%}|$) relativ zum Zeitbereichsverfahren auf. Da allerdings der rekonstruierte Auftriebsbeiwert mit 1,7% eine vergleichsweise geringe Abweichung hat, ist der Einfluss dieser Abweichungen auf das Zeitsignal gering. Der vernachlässigbare Einfluss begründet sich durch die Werte dieser Koeffizienten, die im Vergleich zum dominanten $|\hat{c}_L|_{k=1}$ um mindestens drei Größenordnungen kleiner sind.

Der Verlauf des Spektrums aus Harmonic Balance (siehe Abb. 3.12) ist kontinuierlich, was

Tab. 3.3.: RMS und Fourier-Koeffizienten des Auftriebsbeiwerts sowie die dimensionslose Ablösefrequenz aus dem Zeit- und Frequenzbereichsverfahren.

	Zeitbereich	Harmonic Balance ⁵	$ \Delta_{\%} $ in [%]
$c_{L,RMS}$ in [–]	0,237	0,233	1,7
Sr in [–]	0,1618	0,1648	1,9
$ \hat{c}_L _{k=0}$ in [–]	$4,4 \cdot 10^{-4}$	$3,5 \cdot 10^{-4}$	20,5
$ \hat{c}_L _{k=1}$ in [–]	$3,4 \cdot 10^{-1}$	$3,3 \cdot 10^{-1}$	2,9
$ \hat{c}_L _{k=2}$ in [–]	$8,9 \cdot 10^{-5}$	$8 \cdot 10^{-5}$	10,1
$ \hat{c}_L _{k=3}$ in [–]	$6,4 \cdot 10^{-4}$	$6,7 \cdot 10^{-4}$	4,7

allerdings zunächst nicht zur Eingabe eines diskreten harmonischen Sets: $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ passt. Allerdings wird im Rahmen der zuvor gezeigten Kräfteberechnung das rekonstruierte Zeitsignal des Auftriebs mittels einer DFT in den Frequenzbereich transformiert. Dabei kann, wie bereits in den Grundlagen 2.4.1 dargelegt, der spektrale Leckeffekt nicht vollständig verhindert werden. Aus diesem Grund erhalten benachbarte Frequenzen von Signalspitzen einen Beitrag. Diese Beiträge sind aber verglichen mit den Maxima gering, sodass die Qualität des Signals kaum beeinflusst wird.

Darüber hinaus kann es aufgrund von nichtlinearer Operationen zur Entstehung von Frequenzen kommen, die außerhalb des gewählten harmonischen Sets liegen. Dazu sei wieder auf die Veranschaulichung anhand der Burgersgleichungen im Anhang C verwiesen. Ein Beispiel für eine nicht-lineare Operation bei der Kräfteberechnung, ist die Bestimmung des tangentialen Einheitsvektors der Geschwindigkeit. Dafür wird z.B. zur Bestimmung der Geschwindigkeitskomponente in x -Richtung die Erhaltungsgröße des x -Impulses (ρu) durch die Dichte geteilt.

⁵Das Verfahren ist mit der empirischen Fundamentalfrequenz aufgesetzt, die in Form der Strouhal-Zahl in der Tabelle dargestellt ist.

3.3.2.2. Frequenzsuchstrategie

Für die in den vorigen Abschnitten gezeigten Simulationsergebnisse ist Harmonic Balance mit einer Fundamentalfrequenz aufgesetzt, die aus einem empirischen Modell bestimmt wird. Allerdings zeigt Tabelle 3.3, dass zwischen Modellfrequenz und der Frequenz aus den Ergebnissen des Zeitbereichsverfahrens eine Differenz von 1,9% liegt. Daher soll hier eine von Spiker, [36], vorgestellte Strategie zur Auffindung einer passenden Frequenz für Harmonic Balance demonstriert werden.

Zuvor soll anhand einer mathematischen Überlegung die Grundlage des Verfahrens besprochen werden. Ausgehend davon, dass ω^* die korrekte Frequenz einer Problemstellung ist und \hat{q}^* die richtige Lösung dazu ist, erhält man für eine Harmonische die idealisierte Formulierung für Harmonic Balance aus Gleichung (2.47):

$$j\omega^* \hat{q}^* + \widehat{R(\hat{q}^*)} = 0. \quad (3.10)$$

Geht man zusätzlich davon aus, dass eine inkorrekte Frequenz (ω) vorliegt, die genau genug ist, damit ihre Lösung bzw. Amplitude \hat{q} eine geringe Abweichung zu \hat{q}^* aufweist, d.h. unter Vernachlässigung eines Amplitudenfehlers, erhält man eine weitere Formulierung für eine fehlerhafte Frequenz (3.11). Durch Einsetzen von Gleichung (3.10) erkennt man, dass das Verfahren aufgrund der Frequenzabweichung einen Fehler produziert, daher kann lediglich näherungsweise null erreicht werden.

$$j\omega \hat{q}^* + \widehat{R(\hat{q}^*)} = j(\omega - \omega^*) \hat{q}^* \approx 0 \quad (3.11)$$

Wendet man entsprechend des üblichen Vorgehens zur Lösung von Harmonic Balance den Ansatz für das Pseudozeitverfahren an, folgt die gewöhnliche Differenzialgleichung:

$$\frac{\partial \hat{q}^*}{\partial \tau} + j(\omega - \omega^*) \hat{q}^* \approx 0. \quad (3.12)$$

Schließlich offenbart die analytische Lösung (3.13) dieser Differenzialgleichung, dass die initiale Lösung ($\hat{q}^*|_{\tau=0}$), d.h. die korrekte Lösung, in der Pseudozeit einer dauerhaften Phasenwinkeländerung unterliegt. Dabei bleibt die Amplitude bzw. der Betrag gleich und für äquidistante Schrittweiten in der Pseudozeit ergibt sich eine konstante Änderungsrate.

$$\hat{q}^*(\tau) = \hat{q}^*|_{\tau=0} e^{-j(\omega - \omega^*)\tau} \quad (3.13)$$

Entsprechend der Annahme, dass die Lösung der fehlerhaften Frequenz nahe an der korrekten Frequenz liegt, sind die getroffenen Aussagen nur für kleine Residuen bzw. für konvergierte Verfahren gültig.

Anhand der Simulationsergebnisse dieser Arbeit kann die Gültigkeit der theoretischen Überlegung dargelegt werden.

Vorab sei wiederholt, dass es sich bei der empirisch ermittelten Frequenz um eine fehlerhafte Fundamentalfrequenz handelt. Für eine Harmonic Balance Simulation mit dieser Frequenz liegt ausgehend von Abbildung 3.10 ab Iterationsschritt 10000 ein Zustand konstanter Residuen bzw. kleiner Residuen vor. Wie es zuvor postuliert wurde, stellt sich für diesen Zustand eine konstante Änderungsrate des Phasenwinkels über die Iterationen ein (siehe Abb. 3.13). Bei dem betrachteten Winkel handelt es sich um den Phasenwinkel des Fourier-Koeffizienten der Dichte der 1. Harmonischen. Dazu sei angemerkt, dass gleichzeitig keine Änderung im Betrag dieses Koeffizienten vorliegt.

Das zentrale Element der Suchstrategie ist die Feststellung, dass der Phasenwinkel für die optimale Frequenz von Harmonic Balance sich nicht mehr ändert, wie es aus Gleichung (3.13) hervorgeht. Deshalb kann, durch die Hinzunahme von mindestens einer weiteren Harmonic Balance Simulation, der Punkt inter- bzw. extrapoliert werden, an dem die Phase sich nicht mehr ändert.

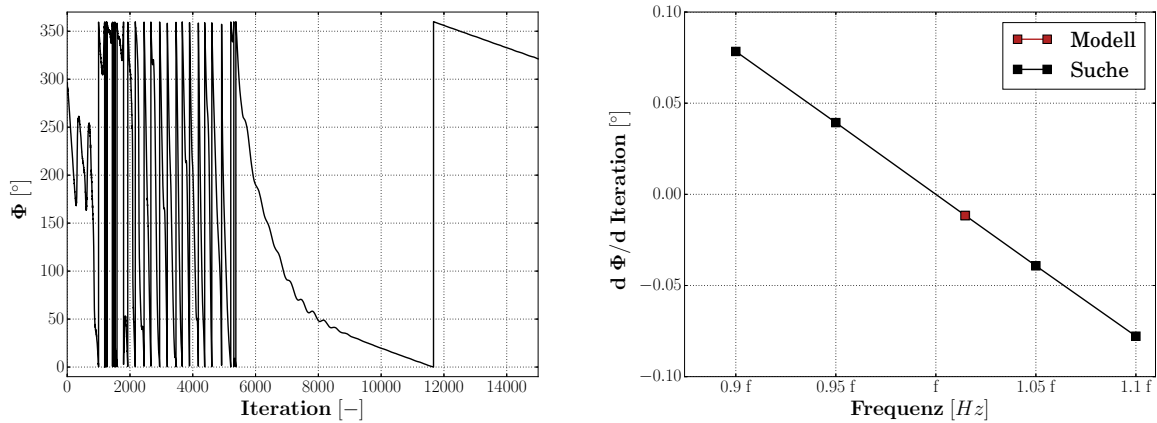


Abb. 3.13.: Darstellung des Phasenwinkels des Fourier-Koeffizienten der Dichte der 1. Harmonischen für Harmonic Balance bei einer empirisch berechneten Fundamentalfrequenz (links) und Frequenzsuchverfahren nach Spiker (rechts).

Bei der Berechnung der optimalen Frequenz ist es hilfreich, dass sich qualitativ ein linearer Verlauf der Phasenwinkeländerung pro Iteration ($d\Phi/d\text{Iteration}$) über den Fundamentalfrequenzen einstellt. Dadurch ist es ausreichend, zusätzlich zur empirischen Fundamentalfrequenz eine weitere zu betrachten. Schließlich erhält man die interpolierte Frequenz nach Spiker zu 594702Hz.

Eine Bestätigung dafür, dass das Verfahren erfolgreich die optimale Frequenz bereitstellt, erhält man aus dem L_1 -Residuum. Trägt man den Wert der Harmonischen mit dem größten L_1 -Residuen (f_1) für Harmonic Balance Simulationen mit unterschiedlichen Fundamentalfrequenzen über die jeweilige Frequenz auf, ergibt sich das minimale Residuum für die nach Spiker berechnete Frequenz (f) (siehe Abb. 3.14).

3. Laminare Umströmung eines Zylinders

Außerdem ist ebenfalls das gewünschte Verhalten des Phasenwinkel dargestellt: Im Bereich der konstanten Residuen, d.h. ab ungefähr Iteration 10000, ist die Änderung des Phasenwinkels qualitativ null.

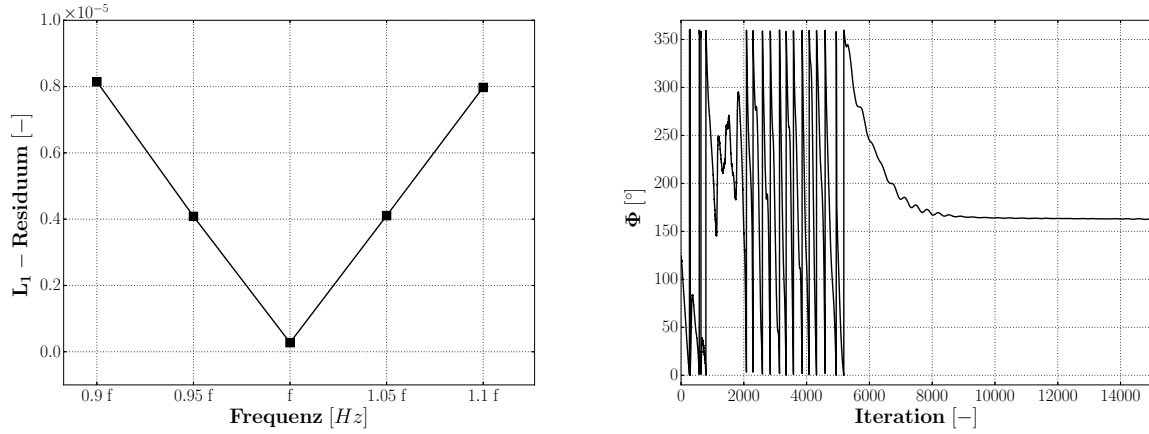


Abb. 3.14.: Wert des L_1 -Residuums der 1. Harmonischen am Ende von Harmonic Balance mit verschiedenen Fundamentalfrequenzen (links) und Phasenwinkel des Fourier-Koeffizienten der Dichte der 1. Harmonischen bei einer Simulation der optimalen Frequenz (rechts).

Motiviert durch die geringen Residuen infolge der Strategie, wird die Frequenzsuche für alle Reynolds-Zahlen der Berechnungen im Zeitbereich (vgl. Tab. 3.1) angewendet. Der Zielparameter offenbart eine visuelle perfekte Übereinstimmung mit dem Zeitbereichsverfahren (siehe Abb. 3.15), wodurch die erfolgreiche Anwendung der Strategie dargelegt ist.

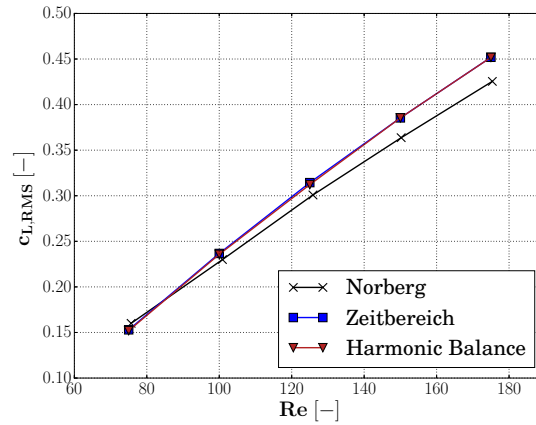


Abb. 3.15.: Auftriebsbeiwerte des Zylinders aus experimentellen Daten von Norberg, dem Zeit- und Frequenzbereichsverfahren mit denen nach Spiker optimierten Fundamentalfrequenzen.

Eine detailliertere Betrachtung der Simulation bei $Re = 100$ (siehe Tab. 3.4) offenbart im Vergleich zu der Berechnung mit HB und der empirisch ermittelten Fundamentalfrequenz (vgl. Tab. 3.3) eine bessere Übereinkunft mit dem Auftriebsbeiwert aus dem Zeitbereichsverfahren. Die relative Abweichung kann hierbei auf 0,8% reduziert werden. Analog dazu ist infolge der Suchstrategie die dimensionslose Ablösefrequenz bzw. Fundamentalfrequenz ebenfalls in besserer Übereinstimmung, sodass hier die Differenz auf 0,4% sinkt. Unter Einbeziehung der experimentellen Daten

Tab. 3.4.: Auftriebsbeiwert aus Harmonic Balance für die nach Spiker ermittelte Fundamentalfrequenz und die entsprechenden Referenzdaten aus dem Zeitbereichsverfahren.

	Experiment ⁶	Zeitbereich	Harmonic Balance
$c_{L,RMS}$ in $[-]$	0,23	0,237	0,235
Sr in $[-]$	0,1647	0,1618	0,1624

haben die Ergebnisse aus Harmonic Balance mit der optimierten Fundamentalfrequenz geringere Abweichungen als die Äquivalente aus dem Zeitbereichsverfahren. Jedoch werden die geringsten Differenzen mit der Frequenzbereichsmethode und der empirisch ermittelten Fundamentalfrequenz erzielt (vgl. Tab. 3.3 und Tab. 3.4). Da allerdings das minimale Residuum bei der nach Spiker ermittelten Frequenz darauf schließen lässt, dass es sich bei dieser Frequenz um den optimalen Wert für das gewählte numerische Setup handelt, wird im Folgenden diese Simulation als Referenz für Vergleiche herangezogen.

Abschließend sei darauf verwiesen, dass das qualitativ lineare Verhalten des Phasenwinkels des Fourier-Koeffizienten der Dichte über den Iterationen bei allen Harmonischen auftritt. Jedoch unterscheidet sich die Steigung des Phasenwinkel zwischen Harmonischen, sodass für die erste Harmonische der Wert am geringsten ist und für höhere Harmonische ansteigt. Zur Veranschaulichung befindet sich im Anhang E die Darstellung des Phasenwinkels der verschiedenen Harmonischen von der Simulation mit der empirischen Fundamentalfrequenz.

Das Ansteigen der Phasenwinkeländerung lässt sich dadurch erklären, dass für eine Unsicherheit in der Fundamentalfrequenz bei höheren Harmonischen diese Unsicherheit zur entsprechenden optimalen höheren Harmonischen ansteigt. Folglich ist es entscheidend innerhalb eines Frequenzsuchvorgangs lediglich Phasenwinkel von Fourier-Koeffizienten einer Harmonischen zu betrachten.

⁶Auftriebsbeiwert von Norberg und Strouhal-Zahl von Williamson.

3.3.2.3. Künstliche Unsicherheiten

Als Voruntersuchung für Anwendungsfälle in denen kein empirisches Modell vorliegt oder das Modell schlechte Vorhersagen für die physikalischen Frequenzen liefert, wird hier das Verhalten von Harmonic Balance für breitgefächerte Abweichungen (Δ) von der optimalen Frequenz (f) nach Spiker untersucht. Dafür bleibt das bisherige Setup aus Abschnitt 3.3.1 bis auf die Wahl der Harmonischen unverändert. Die betrachteten Modifikationen sind in Tabelle 3.5 aufgeführt.

Tab. 3.5.: Zusammensetzung des harmonischen Sets für die Untersuchung der Auswirkungen einer erhöhten Unsicherheit in der Fundamentalfrequenz bei Harmonic Balance

f_1 in [Hz]	$f \cdot \Delta$
Δ	$\{0,25, \dots, 1,75\}$
Set in [Hz]	$\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$

Konvergenzverhalten und Auftriebsbeiwert

Zu Beginn sei herausgestellt, dass Harmonic Balance für alle betrachteten Abweichungen einen Zustand gefunden hat, für den sich das L_1 -Residuum nicht mehr ändert. D.h. es stellt sich ein vergleichbarer Konvergenzverlauf wie zuvor beschrieben ein (vgl. Abb. 3.10). Allerdings unterscheidet sich das Niveau des maximalen L_1 -Residuums, was in Abbildung 3.16 dargestellt ist. Gezeigt wird das größte Residuum der unterschiedlichen Harmonischen einer Simulation mit einer Unsicherheit in der Fundamentalfrequenz. Zusätzlich ist zur Bewertung der Lösungsqualität ein Graph mit dem berechneten Auftriebsbeiwert des Zylinders aufgeführt.

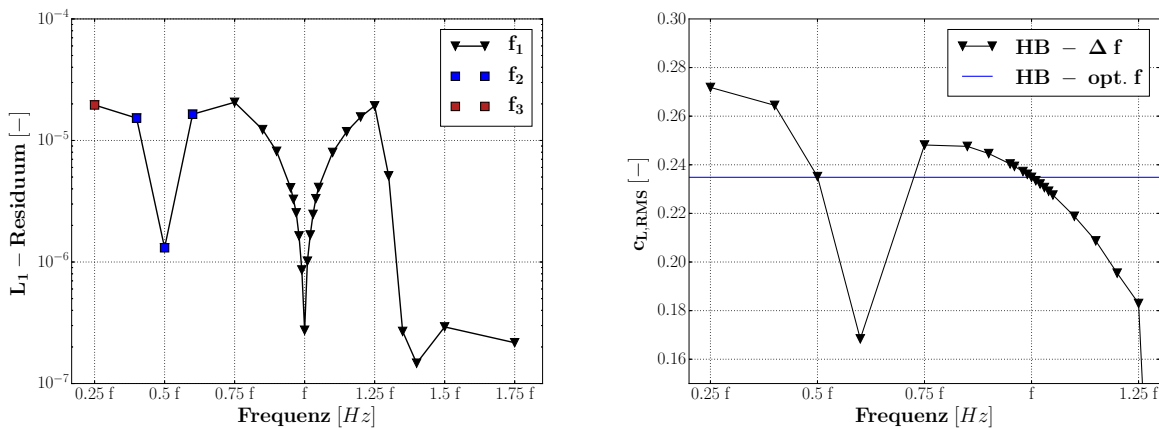


Abb. 3.16.: Wert des konstanten L_1 -Residuenlevel zu Simulationsende (links) und RMS des Auftriebsbeiwerts am Zylinder (rechts) jeweils über unterschiedlichen Fundamentalfrequenzen von Harmonic Balance.

Für alle Simulationen im dargestellten Abweichungsbereich kann qualitativ die Wirbelstraße hinter dem Zylinder berechnet werden. Die Ausnahme tritt für $\Delta \geq 1,25$ auf. Es liegen zwar für das Residuum im Vergleich zu den anderen Frequenzunsicherheiten geringe Werte vor, jedoch stellt sich ein stationäres Strömungsbild ein. Die zuvor beschriebene Anregung der Residuen der höheren Harmonischen (siehe Abs. 3.3.2.1) bleibt aus, sodass keine Instationaritäten ausbilden werden und dadurch sich der Auftriebsbeiwert nahe Null ($\approx 10^{-5}$) befindet. In dem Graphen sind die entsprechenden Werte nicht aufgeführt, um eine detailliertere Darstellung der anderen Ergebnisse zu erreichen.

Für Unsicherheiten im Bereich von $\Delta = \{0,75, \dots, 1,25\}$ erhält man für das L_1 -Residuum einen symmetrischen und trichterförmigen Verlauf, der seinen Tiefpunkt in der Mitte des Intervalls bei der optimalen Frequenz hat. Exemplarische Residuenverläufe befinden sich im Anhang F. Analog zum Residuum nähert sich die physikalische Größe des Auftriebs mit fallender Unsicherheit dem Wert bei der Frequenz ohne Unsicherheit an.

Eine Unterschätzung der Frequenz führt zu erhöhten Auftriebsbeiwerten, während bei zu großen Frequenzen der Auftrieb als zu gering berechnet wird. Hierbei liegt die Abweichung im Auftrieb, für eine gegenüber der optimalen 25% höheren Frequenz, mit 22,1% fast viermal so hoch, wie für die Unterschätzung um 25% mit 5,7%. Dieser Trend ist widersprüchlich zur symmetrischen Verteilung des Residuums, da hier für das gleiche Niveau bei einer Unter- bzw. Überschätzung stark unterschiedliche Abweichungen in der physikalischen Größe auftreten.

Die zuvor gezeigte Frequenzsuchstrategie von Spiker, die für Abweichungen im Bereich von $\{0,9, \dots, 1,1\}$ erfolgreich eingesetzt wird, kann hier auf den Bereich von $\Delta = \{0,75, \dots, 1,25\}$ erweitert werden (siehe Abb. 3.17). Anhand der Abbildung ist zu erkennen, dass das zuvor festgestellte lineare Verhalten der Phasenänderung pro Iteration seine Gültigkeit für $\pm 25\%$ Abweichung zur optimalen Frequenz behält. Somit kann die Extra- bzw. Interpolation der optimierten Frequenz ohne Phasenwinkeländerung durchgeführt werden.

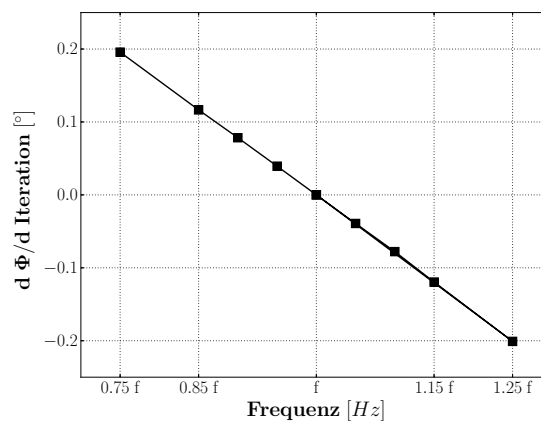


Abb. 3.17.: Änderung des Phasenwinkels pro Iteration bei unterschiedlichen Fundamentalfrequenzen.

Im Bereich von $\Delta = \{0,4, \dots, 0,6\}$ aus Abbildung 3.16 ist wie zuvor ein symmetrischer und trichterförmiger Verlauf des L_1 -Residuums zu erkennen. Es sei darauf hingewiesen, dass es sich hier nicht um Residuen der 1. Harmonischen handelt, da der Wert der 2. bzw. 3. Harmonischen (f_2 und f_3) überwiegt. In diesem Kontext sei erwähnt, dass die spektrale Analyse des Zeitsignals des Auftriebsbeiwerts aufzeigt, dass entsprechend dem maximalen Residuum die dominanten Signalspitzen ebenfalls bei der 2. bzw. 3. Harmonischen liegen. Die Änderung der dominanten Harmonischen bzw. der Wechsel im maximalen Residuum, lässt sich damit erklären, dass infolge der erhöhten Unsicherheit die 2. bzw. 3. Harmonische der jeweiligen Simulation, näher an der physikalische Frequenz liegt (vgl. Abb. 3.12).

Die Anordnung der Residuen motiviert dazu erneut das Frequenzsuchverfahren anzuwenden. Bei der Vorstellung des Verfahrens wurde erwähnt, dass das Verfahren für die gleiche Harmonische angewendet werden sollte. Da, wie erwähnt, die dominante Harmonische nicht mehr bei der 1. Harmonischen liegt, wird das Verfahren auf den Fourier-Koeffizienten der Dichte von f_2 angewendet. Dabei wird die Simulation bei $\Delta = 0,75$ nicht betrachtet, weil hier die dominante Frequenz bei der 3. Harmonische liegt. Das Ergebnis ist in Abbildung 3.18 aufgeführt.

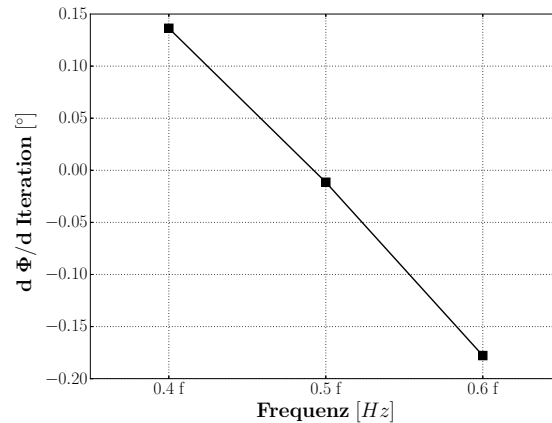


Abb. 3.18.: Darstellung der Änderung des Phasenwinkels des Fourier-Koeffizienten der Dichte pro Iteration bei unterschiedlichen Fundamentalfrequenzen von Harmonic Balance. Dabei handelt es sich um die Koeffizienten der 2. Harmonischen.

Aus dem Graphen lässt sich visuell eine Störung im linearen Verlauf erkennen, weshalb eine Ungenauigkeit für die Ermittlung der optimale Frequenz entsteht. Außerdem ist zu erkennen, dass es sich bei $0,5f$ nicht um die optimale Frequenz handelt, da hier eine Änderung im Phasenwinkel auftritt.

Aus dem Auftriebsbeiwert von Abbildung 3.16, wird deutlich, dass bei 60% der optimalen aufgesetzten Frequenz eine Anomalie auftritt, da hier die maximale Abweichung im Auftriebsbeiwert vorliegt. Es ist zu vermuten, dass der im Folgenden beschriebene Vorgang bei dieser Anomalie für die zuvor beschriebene Störung des linearen Verhaltens (vgl. Abb. 3.18) verantwortlich ist.

Diskussion der Ergebnisse und Empfehlung für die Anwendung

Fehlerhafte Anregung bei 60% der optimalen Frequenz: Im Gegensatz zum zuvor beschriebenen Verlauf der L_1 -Residuen (vgl. Abb. 3.10) kommt es bei der Unsicherheit von $\Delta = 0,6$ zu einer Anomalie (vgl. Abb. 3.19). Bis ungefähr Iterationsschritt 7000 ist das Verhalten vergleichbar. Allerdings stoppt danach die Konvergenz der zeitgemittelten Lösung, während die höheren Harmonischen ein nahezu konstantes Niveau über die Iterationen halten.

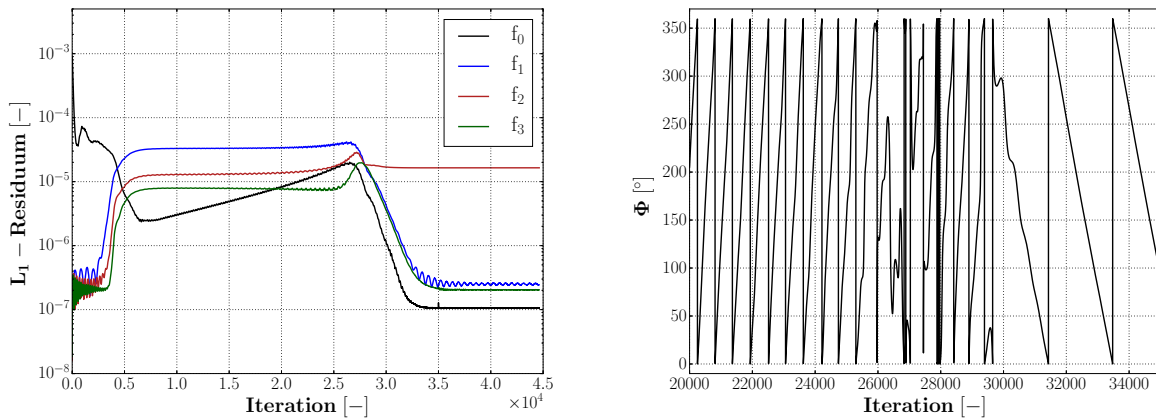


Abb. 3.19.: Simulation bei 60% der optimalen Fundamentalfrequenz: L_1 -Residuenverläufe der Harmonischen (links) und Phasenwinkel des Fourier-Koeffizienten der Dichte der 2. Harmonischen (rechts).

Im Anschluss daran ist ein Anwachsen im Residuum der 0. Harmonischen bis ungefähr zur Iteration 27000 zu verzeichnen. Danach beginnt das selbe Residuum erneut zu fallen. Gleichzeitig kommt es zu einer Anregung in den höheren Harmonischen ($f_{k>0}$), die allerdings nach wenigen Hundert Iterationen in ein konvergentes Verhalten umschlägt. Während die 1. und 3. Harmonische bis zum Erreichen des auskonvergierten Zustand fallen und dadurch ca. zwei Größenordnungen abbauen können, kommt die Konvergenz der 2. Harmonischen zum Erliegen. Bis zum Simulationsende bei Iteration 45000 bleibt dieses Residuum nahezu bei dem Wert, welches es bereits nach 7000 Iterationen erreicht hat. In dem beschriebenen Prozess wechselt die Rolle des maximalen Residuums von der 1. auf die 2. Harmonische.

Des Weiteren zeigt der Graph (siehe Abb. 3.19) des Phasenwinkels des Fourier-Koeffizienten der Dichte von der 2. Harmonischen zu Beginn des dargestellten Bereichs eine nahezu konstante positive Änderungsrate. Gleichzeitig mit der erneuten Anregung des Residuums der 2. Harmonischen verändert sich der Verlauf des Phasenwinkels bis sich nach dem Erreichen des finalen Levels der 1. und 3. Harmonischen erneut eine konstante Steigung einstellt. Dabei ist die Änderungsrate hier negativ und ihr Absolutwert ist geringer als das Äquivalent aus der Startphase.

Dazu sei angemerkt, dass die Frequenzsuchstrategie lediglich für die am Ende erreichte Phasenwinkeländerung Erfolg hat. Daraus ist abzuleiten, dass die Methode erst angewendet werden sollte, wenn alle Residuen ein näherungsweise konstantes Niveau erreicht haben.

An dieser Stelle wird der Verlauf der Fourier-Koeffizienten der Harmonischen über die Iterationen betrachtet (siehe Abb. 3.20), da bereits im Abschnitt 3.3.2 eine Korrelation zwischen dem größten Residuum und dem dominanten Fourier-Koeffizient festgestellt wurde. Aufgeführt ist der zuvor beschriebene Bereich, in dem der Wechsel im höchsten Residuum stattfindet.

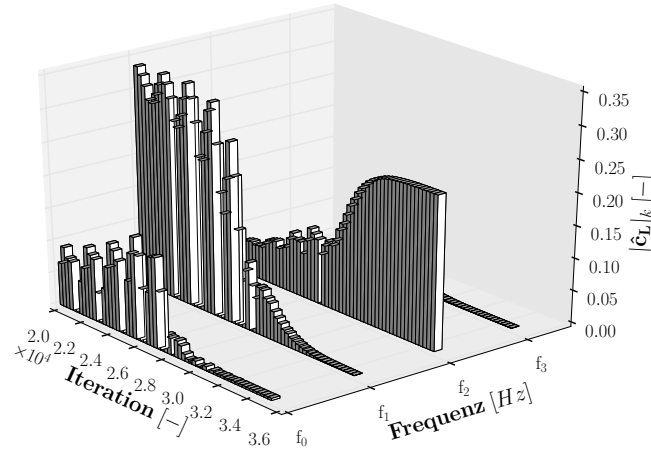


Abb. 3.20.: Spektrale Darstellung des Auftriebsbeiwerts zu unterschiedlichen Simulationszeitpunkten.

Die Abbildung bestätigt die zuvor aufgestellte Beobachtung, dass die Harmonische mit dem dominanten Residuum ebenfalls den dominanten Fourier-Koeffizienten besitzt. Außerdem ergibt sich in diesem Spezialfall, dass Harmonic Balance zu Beginn des iterativen Lösungsprozesses die Energie im Spektrum auf die „falsche“ Frequenz verteilt. Im gezeigten Bereich von ca. 25000 bis 30000 korrigiert sich das Verfahren mit einer Umverteilung der Energie auf die 2. Harmonische. Diese Wahl entspricht auch den bisher gewonnenen Erkenntnis, dass das Verfahren den Hauptanteil der Energie im Spektrum auf die Harmonische verteilt, welche am nächsten an der optimalen Frequenz liegt (vgl. für $\Delta = 0,6 : f - f_1 > f_2 - f$).

Anwendung der Frequenzsuchstrategie: An dieser Stelle sollen wichtige Eigenschaften für die Frequenzsuchstrategie für Harmonic Balance, welche für den Testfall eines Zylinders beobachtet werden können (siehe Abs. 3.3.2.1 und 3.3.2.3), festgehalten werden. Außerdem werden die Abweichungsbereiche für die Anwendung der Methode zusammengefasst.

Eigenschaften:

- innerhalb eines Suchvorgangs sollte nicht bei der Analyse des Phasenwinkels zwischen den Harmonische gewechselt werden
- die Harmonische mit dem dominanten Fourier-Koeffizienten des Auftriebsbeiwerts hat ebenfalls das maximale L_1 -Residuum
- für auf- bzw. absteigende Trends in den Residuen besteht die Gefahr eines Fehlschlags der Strategie

Abweichungsbereiche:

- optimale Anwendbarkeit der Methode für Abweichungen der Fundamentalfrequenz zur physikalischen Frequenz im Bereich von $\pm 25\%$
- Fehlschlag der Strategie für eine Überschätzung der Fundamentalfrequenz gegenüber der phy. Frequenz von über 25%
- gering fehlerbehafteter Einsatz der Methode für eine Unterschätzung der Fundamentalfrequenz im Vergleich zur phy. Frequenz im Bereich⁷ von 40% bis 60%

Abschließend sei spekulativ auf eine erweiterte Anwendung des Verfahrens hingewiesen: Dadurch, dass für eine Abweichung von $\Delta = \{0,4, \dots, 0,6\}$ die Methode für die 2. Harmonische einsetzbar ist und die selbige Frequenz im Bereich von $\pm 25\%$ Differenz zur physikalischen Frequenz liegt, sei vermutet, dass die Anwendbarkeit des Verfahrens von Spiker immer gegeben ist, wenn eine beliebige Harmonische bis auf $\pm 25\%$ Abweichung der phy. Frequenz entspricht.

Wenn diese Spekulation nachgewiesen werden kann, müssten Frequenzsuchen nicht darauf achten, dass die 1. Harmonische in der Nähe der phy. Frequenz liegt, was ein enormer Vorteil wäre.

⁷Es wird vermutet, dass die zuvor beschriebene Anomalie für das fehlerhafte Verhalten verantwortlich ist.

3.3.3. Einfluss der Anzahl der betrachteten Harmonischen

Neben der Wahl der Fundamentalfrequenz stellt die Anzahl (K) der betrachteten Harmonischen einen weiteren Parameter dar, um Einfluss auf die Diskretisierung im Frequenzbereich zu nehmen. Vergleichbar mit der Untersuchung des zeitlichen Diskretisierungsfehlers bei der Verifikation der Simulation im Zeitbereich (vgl. Abs. 3.2.2), wird ebenfalls in diesem Abschnitt Harmonic Balance verifiziert. Da allerdings ein generelles Interesse an dem Einfluss einer Hinzu- bzw. Wegnahme von Harmonischen auf die Lösungsqualität besteht, werden zusätzlich Betrachtungen angestellt, um mögliche Erklärungen für das Verhalten der Frequenzbereichsmethode bereitzustellen.

Vorab soll definiert werden, dass für die Zählung der Harmonischen die zeitgemittelte Lösung beachtet wird, sodass die Anzahl an Harmonischen in den Rechnungen von Abschnitt 3.3.2 bei $K = 4$ liegt. Des Weiteren werden die Untersuchungen für die nach Spiker optimierten Fundamentalfrequenz durchgeführt.

Quantitativer Vergleich

Die Lösungsqualität wird anhand des Auftriebsbeiwerts bewertet. Dafür ist in Abbildung 3.21 der RMS dieser Größe über die jeweilige Größe des harmonischen Sets aufgetragen. Um über die Qualität der Lösung eine Aussage zu treffen, ist als Vergleichswert ebenfalls der entsprechende Wert aus dem Zeitbereichsverfahren eingezeichnet.

Bei der Betrachtung der zeitgemittelten Lösung sowie der 1. Harmonischen ($K = 2$) ergeben sich die größten Abweichungen zu den Ergebnissen aus dem Zeitbereichsverfahren: 5,1%. Die Hinzunahme einer weiteren Harmonischen verbesserte die Übereinstimmung auf 4,2%, wobei die Erweiterung auf $K = 4$ die größte Verbesserung erzeugt, sodass die Abweichung, wie zuvor beschrieben, bei 0,8% liegt. Eine Erklärung für die Steigerung der Lösungsqualität von $K = 3$ auf $K = 4$ erhält man bei der Betrachtung des Spektrums aus der Zeitbereichsrechnung (vgl. Abb. 3.4). Verglichen mit den diskreten Signalspitzen der Harmonischen mit Ausnahme der dominanten, ist der Fourier-Koeffizient bei der 3. Harmonischen am größten.

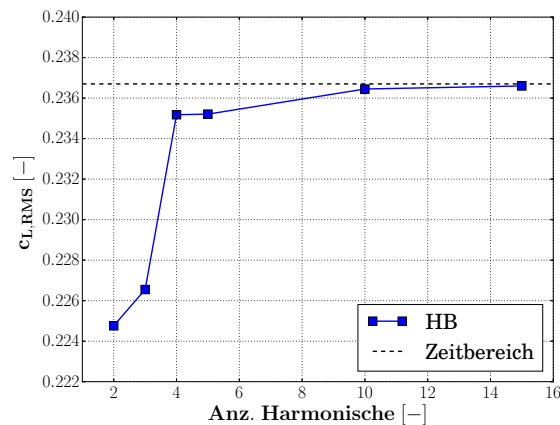


Abb. 3.21.: Auftriebsbeiwert aus Harmonic Balance Simulationen mit variierender Anzahl von Harmonischen.

Je mehr Frequenzen in der Simulation betrachtet werden, desto kleiner wird die Differenz zwischen den Auftriebsbeiwerten aus Harmonic Balance und dem Zeitbereichsverfahren, sodass bei $K = 15$ die kleinste Abweichung von 0,1% vorliegt.

Folglich ist die Simulation hinsichtlich Diskretisierungsfehlern verifiziert, da Harmonic Balance das selbe Rechnetz und räumliche Diskretisierungsschemata benutzt wie das Zeitbereichsverfahren, welches bereits bezüglich räumlicher Fehler verifiziert ist (siehe. Abs. 3.2.2).

Qualitativer Vergleich

Die Erweiterung des harmonischen Sets von $K = 2$ auf $K = 4$ hat den größten Einfluss auf die Lösungsqualität. Aus diesem Grund werden anhand von Abbildung 3.22 diese beiden Fälle detaillierter betrachtet. Das Strömungsfeld zeigt die Differenz des Felds aus dem Zeitbereichsverfahren zu den jeweiligen Feldern aus Harmonic Balance. Bei der visualisierten Größe handelt es sich um den Betrag des Fourier-Koeffizienten des Drucks der 1. Harmonischen.

Das linke Strömungsbild mit vier Harmonischen liefert den Grund dafür, dass der Auftriebsbeiwert aus Harmonic Balance nahezu in perfekter Übereinstimmung mit dem Äquivalent aus dem Zeitbereichsverfahren ist: Im Bereich um den Zylinder sind qualitativ keine Abweichungen zu erkennen. Die Differenzen entstehen hier erst stromab des Zylinders im Nachlauf. Dabei kennzeichnen positive Werte eine Unterschätzung der Ergebnisse aus dem Zeitbereichsverfahren.

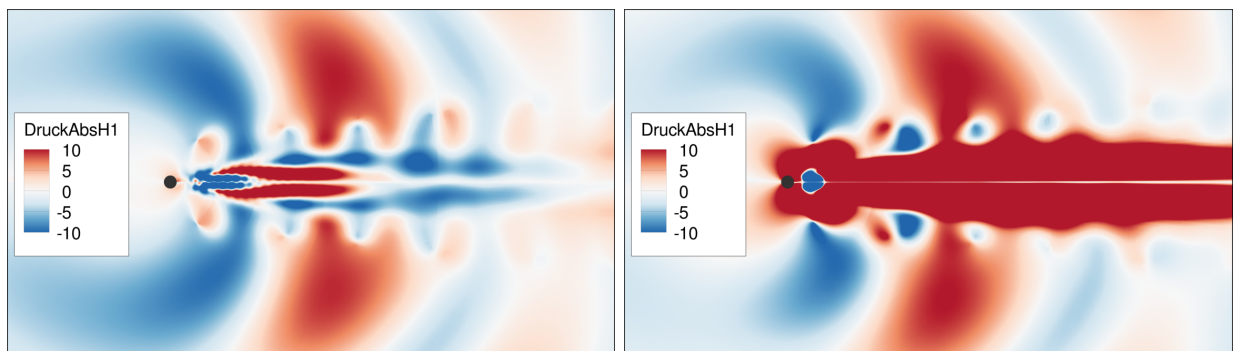


Abb. 3.22.: Darstellung der Differenz aus Zeitbereichsverfahren und Harmonic Balance durch den Betrag des Fourier-Koeffizienten des Drucks der 1. Harmonischen: Links mit $K = 4$ und rechts mit $K = 2$ Harmonischen.

Dem gegenüber steht die Rechnung mit zwei Harmonischen. Hier liegen bereits direkt am Zylinder Differenzen vor. Da sich der Auftrieb aus den Strömungsdaten in diesem Bereich berechnet, lassen sich dadurch die erhöhten Abweichungen im Auftriebsbeiwert erklären.

Des Weiteren kann festgehalten werden, dass im Nachlauf des Zylinders die räumliche Ausdehnung der Differenzen bei $K = 2$ im Vergleich zu $K = 4$ zunimmt. Ausgehend davon, dass die Berechnung mit dem Zeitbereichsverfahren mehr als vier Harmonische auflöst (vgl. Abb. 3.4), wird ersichtlich, dass vor allem im Nachlauf des Zylinders höhere Harmonische auftreten.

Es kann resümiert werden, dass der Ablösevorgang am Zylinder von der Fundamentalfrequenz, welche der physikalischen Ablösefrequenz entspricht, dominiert wird. Hingegen haben im Nachlauf besonders höhere Harmonische einen Einfluss.

3.3.4. Einfluss der Hinzunahme von Nebenharmonischen

Als letzter Parameter zur Beeinflussung der Frequenzdiskretisierung sind hier sogenannte Nebenharmonische zu nennen. In Abschnitt 3.2.3 ist erwähnt, dass der spektrale Leckeffekt für die Erstellung des Spektrums aus dem Zeitbereichsverfahren (vgl. Abb. 3.23) nicht vollständig unterdrückt werden kann. Folglich ist anzunehmen, dass die Abweichungen zu einem voll-diskreten Spektrum dadurch hervorgerufen werden. Da allerdings Anteile in der Größenordnung von 10^{-3} im „verschmierten“ Bereich des Spektrums zu finden sind, ist die Idee mithilfe zusätzlicher Frequenzen in der näheren Umgebung der Signalspitze diese Anteile zu berücksichtigen (vgl. Abb. 3.23).

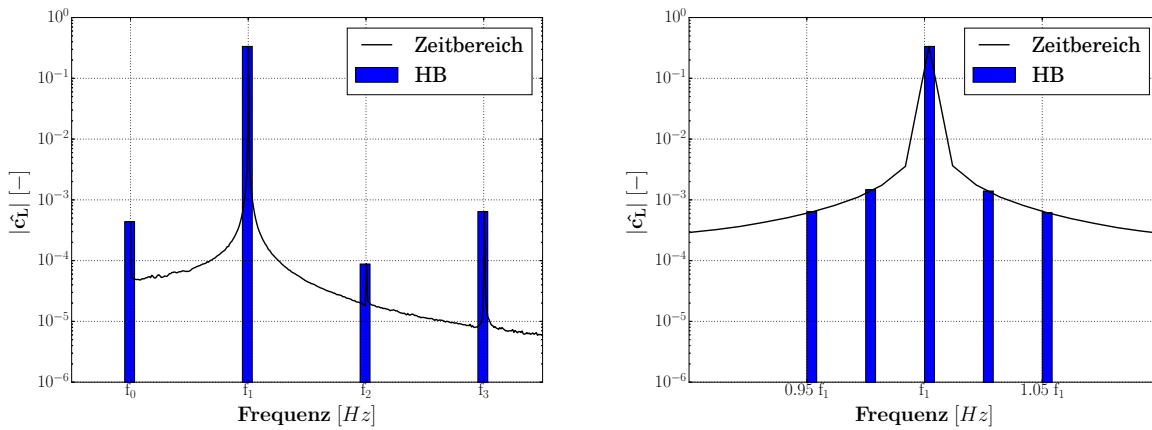


Abb. 3.23.: Spektrum aus dem Zeitbereichsverfahren: links mit einer Abtastung der Harmonischen der Fundamentalfrequenz und rechts mit einer Hinzunahme von Nebenharmonischen um f_1 .

Durch die Wahl einer fiktiven Fundamentalfrequenz (f_1^*) wird hier eine Abtastung der Nebenharmonischen realisiert. Dafür bleibt die bisherige Definition der höheren Harmonischen: $f_k^* = k f_1^*$ erhalten. Bei f_1 handelt es sich weiterhin um die nach Spiker bestimmte Fundamentalfrequenz. In Tabelle 3.6 sind exemplarisch drei betrachtete Setups aufgeführt.

Tab. 3.6.: Setups für die Nebenharmonischen

Fiktive Fundamentalfrequenz	Harmonisches Set
$f_1^* = \frac{f_1}{10}$	$\{f_0^*, f_9^*, f_{10}^*, f_{11}^*, f_{20}^*, f_{30}^*\}$
$f_1^* = \frac{f_1}{20}$	$\{f_0^*, f_{19}^*, f_{20}^*, f_{21}^*, f_{40}^*, f_{60}^*\}$
$f_1^* = \frac{f_1}{100}$	$\{f_0^*, f_{99}^*, f_{100}^*, f_{101}^*, f_{200}^*, f_{300}^*\}$

Für das in dieser Arbeit betrachtete Setup führt die Hinzunahme von Nebenharmonischen zu einem Programmabbruch, da für die primitiven Strömungsgrößen unphysikalische Lösungen berechnet werden. Es bleibt offen weshalb dieser Abbruch zustande kommt. Einerseits liegt die Vermutung nahe, dass die Nebenharmonischen nicht in der physikalischen Lösung des Problems enthalten sind und andererseits ist im Abschnitt 3.3.2 gezeigt, dass man für ein zur physikalischen Lösung verschobenes harmonisches Set, trotzdem eine Lösung berechnen kann.

3.3.5. Effizienz

Die Entwicklung und der Einsatz von Harmonic Balance ist durch die Reduzierung des Rechenaufwands gegenüber Simulationen mit Zeitbereichsverfahren motiviert. Daher widmet sich dieser Abschnitt der Quantifizierung der Rechenzeit bei den Simulationen des Zylinders mit $Re = 100$. Außerdem werden zwei Strategien zur Konvergenzbeschleunigung und damit zur Erhöhung der Effizienz von Harmonic Balance vorgestellt.

Vorab soll die Methode festgelegt werden, die zur Bestimmung der Berechnungszeit eingesetzt wird. Bezüglich der nachfolgenden Strategien wird für alle Harmonischen qualitativ ein Zustand gesucht, in dem sich für alle Harmonischen das L_1 -Residuum nicht mehr ändert. Da es hierbei lediglich um das prinzipielle Aufzeigen der erfolgreichen Anwendung dieser Strategien geht, ist die qualitative Bestimmung ausreichend.

Für die nachfolgende Untersuchung der Effizienz gegenüber dem Zeitbereichsverfahren wird eine physikalische Größe, die Dichte, im Nachlauf des Zylinders untersucht. Für Harmonic Balance wird festgelegt, dass für eine Änderung des Betrags des Fourier-Koeffizienten der Dichte von unter 0,001% pro 200 Iterationen, das Simulationsende vorliegt. Dieses Kriterium muss für alle Harmonischen erfüllt sein. Analog dazu wird für das Zeitbereichsverfahren definiert, dass im Falle einer Änderung der maximalen Amplitude des Zeitsignals der Dichte im Nachlauf von unter 0,001%, die Genauigkeit ausreichend ist. Für beide Simulationsmethoden wird die daraus bestimmte Dauer, qualitativ mit den L_1 -Residuenverläufen entsprechend dem zuvor beschriebenen Vorgehen verglichen.

Strategien zur Konvergenzbeschleunigung bei Harmonic Balance

Aus der Beschreibung des repräsentativen Konvergenzverlaufs (siehe Abs. 3.3.2.1) geht hervor, dass durch die Abnahme des Residuums der 0. Harmonischen, die Residuen der höheren Harmonischen angeregt werden. Diese Anregung ist notwendig, damit die Lösung, ausgehend von ihrem durch die Initialisierung vorgegeben stationären Zustand (3.7), zeitabhängige Phänomene entwickelt.

Initialisierung der 0. Harmonischen: Aus Stabilitätsgründen bezüglich der numerischen Verfahren kann für die Startwerte der zeitgemittelten Lösung ein bereits konvergiertes Strömungsfeld gewählt werden.

Im Detail wird dieses Vorgehen durch eine stationäre Vorrechnung realisiert. Im Vergleich zu einem nicht-konvergierten Strömungsfeld, in das konstante Strömungsgrößen eingesetzt werden, stellt sich eine verzögerte Anregung ein (vgl. Abb. 3.24). Die Graphen weisen exemplarisch die Verläufe der 0. und 1. Harmonischen auf, da die höheren Harmonischen ein vergleichbares Verhalten aufweisen.

3. Laminare Umströmung eines Zylinders

Aus dieser Verzögerung folgt, dass der konstante Zustand des Residuums ca. 1000 Iterationsschritte später erreicht wird. Da keine negativen Effekte bezüglich der Lösungsqualität auftreten, wird diese Methode bei allen im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Simulationen des Zylinders angewendet.

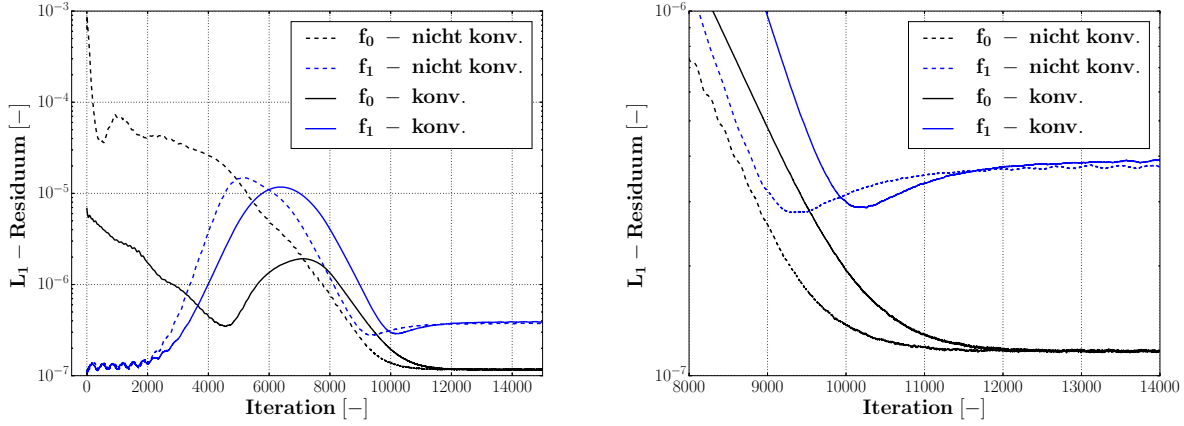


Abb. 3.24.: Gesamter Konvergenzverlauf der 0. und 1. Harmonischen bei einer Initialisierung der zeitgemittelten Lösung mit einer konvergierten und einer nicht konvergierten Lösung (links) und Detaildarstellung (rechts).

Initialisierung der höheren Harmonischen: Mit dem Ziel die Anregung der höheren Harmonischen ($f_{k>0}$) direkt zu Beginn der Rechnung zu erreichen, soll ihre Initialisierung modifiziert werden.

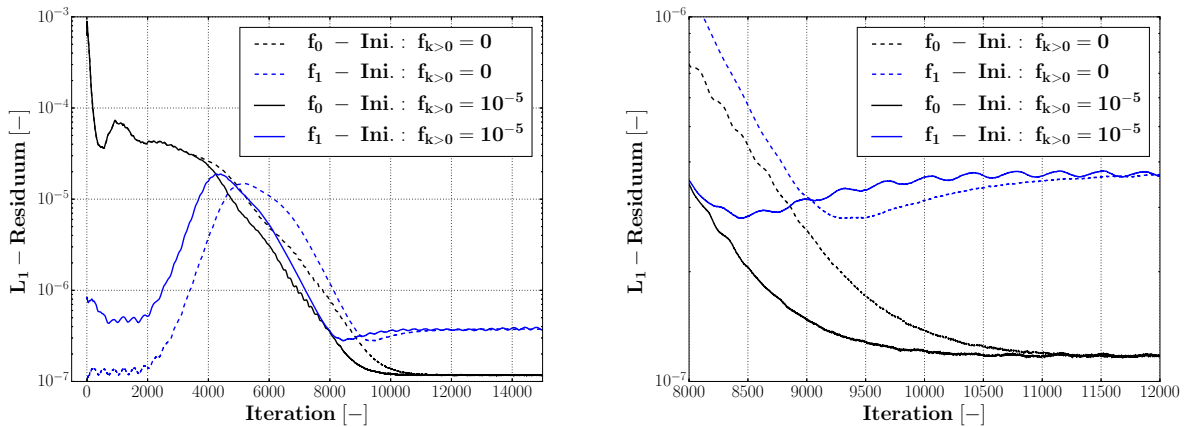


Abb. 3.25.: Gesamter Konvergenzverlauf der 0. und 1. Harmonischen bei einer Initialisierung der höheren Harmonischen mit null und 10^{-5} (links) und Detaildarstellung (rechts).

Als Standard sieht die Implementierung von Harmonic Balance in TRACE an dieser Stelle Nullen vor, allerdings ist in Abbildung 3.25 zu erkennen, dass mit einer Initialisierung der Zustände mit 10^{-5} für alle höheren Harmonischen eine weitere Beschleunigung von ca. 1000 Iterationen erreicht werden kann. Es sei herausgestellt, dass bei dieser Methode ein nicht-konvergiertes Strömungsfeld für die 0. Harmonische zum Einsatz kommt, um sicher zu stellen, dass sich beide Strategien nicht gegenseitig ausschließen.

Bezüglich der Startwerte von 10^{-5} für die Zustände höherer Harmonischen sei vermerkt, dass die anfänglich eingebrachten Instabilitäten gegen Ende der Simulation Schwingungen im L_1 -Residuum verursachen. In diesem Fall bleibt zwar eine Auswirkung auf die Lösungsqualität aus, allerdings wird dadurch die Gefahr dieser Methode deutlich, dass die numerische Stabilität negativ beeinflusst werden kann.

Des Weiteren lässt sich der Erfolg der Methode nicht für beliebige Werte wiederholen. Zum Beispiel ist für Initialwerte von 10^{-4} und 10^{-6} jeweils keine Konvergenzbeschleunigung zu verzeichnen. Folglich ist die Wahl der initialen Fourier-Koeffizienten der höheren Harmonischen fallspezifisch und findet in dieser Arbeit keine weitere Anwendung.

Mit einem geeigneten Verfahren zur Wahl passender Werte ist diese Methode vielversprechend. Zum Beispiel könnte anstelle des Fourier-Koeffizienten, direkt Werte für die Residuen vorgeschrieben werden, um mehr Kontrolle bezüglich der Anregung zu erhalten.

Effizienzsteigerung gegenüber dem Zeitbereich

Bei Harmonic Balance nimmt man mit der Wahl des harmonischen Sets gleichzeitig Einfluss auf den Rechenaufwand. Dabei ist die Kopplung der betrachteten Anzahl von Harmonischen mit dem Rechenaufwand daran zu erkennen, dass pro Harmonische ein Gleichungssystem (2.47) gelöst werden muss. Betrachtet man mehr Frequenzen erhöht sich dadurch ebenfalls der Rechenaufwand.

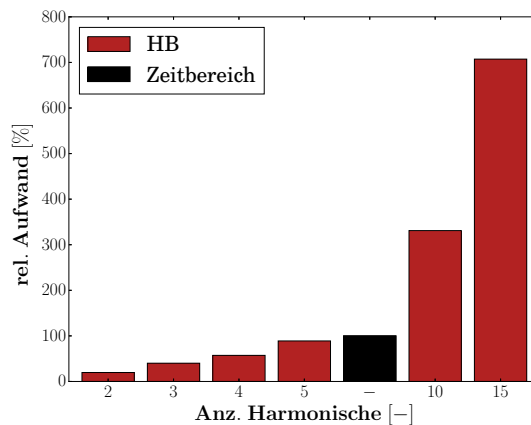


Abb. 3.26.: Relativer Rechenaufwand von Harmonic Balance mit variierender Anzahl von Harmonischen bezogen auf das Zeitbereichsverfahren.

Veranschaulicht wird dieser Zusammenhang anhand von Abbildung 3.26. Im Graphen wird der relative Aufwand im Vergleich zum Zeitbereichsverfahren dargestellt. Es ergibt sich, dass für mehr als fünf Harmonische das Frequenzbereichsverfahren bei über 100% Aufwand liegt.

In Abschnitt 3.3.3 ist dargelegt, dass für ein Set aus vier Harmonischen eine signifikante Steigerung der Lösungsqualität des Auftriebsbeiwerts vorliegt und der Einfluss der Hinzunahme einer weiteren Harmonischen vernachlässigbar ist. Demnach stellt die Simulation mit $K = 4$ den logischen Kompromiss zwischen Rechenaufwand und Genauigkeit dar, wobei der relative Aufwand gegenüber dem Zeitbereichsverfahren bei 57,2% liegt.

Unter Einbeziehung der Frequenzsuchstrategie steigt der Rechenaufwand für $K = 4$ über den der Zeitbereichsrechnung, da mindestens drei Simulationen durchgeführt werden müssen. Um trotzdem effizienter als mit Zeitbereichsverfahren zu sein, ist es möglich Harmonic Balance hinsichtlich der CFL-Zahl zu optimieren, sodass eine schnellere Konvergenz erreicht wird. Zusätzlich dazu können Rückschritte bezüglich der Genauigkeit des Verfahrens gemacht werden, indem man lediglich $K = 2$ Harmonische berechnet. Hierfür beträgt der Aufwand bei einer Einzelrechnung 19,6% und mit einer Frequenzsuche 58,9%, während beim Auftriebsbeiwert eine Abweichung von 5,1% auftritt.

Abschließend bleibt zu vermerken, dass die erreichte Effizienzsteigerung unterhalb der Angabe aus dem Grundlagenteil (siehe Abs. 2.5.2) von mindestens einer bis zwei Größenordnungen liegt. Solche Steigerungen sind in Anwendungsfällen wie einer Turbomaschine zu erwarten, da hier die räumliche Periodizität ausgenutzt werden kann. D.h. im Detail, dass bei einer Betrachtung mehrerer Stufen mit unterschiedlicher Schaufelanzahl es nicht notwendig ist, wie mit Zeitbereichsverfahren, mehrere Passagen zu rechnen. Stattdessen genügt die Berechnung einer Passage, wodurch das Rechengebiet kleiner wird und der Aufwand sinkt.

Speziell für diese Fälle in denen Harmonic Balance sein volles Potential ausschöpfen kann, behält die Frequenzsuchstrategie hinsichtlich Effizienz ihre Legitimation.

4. Selbst-erregte Schwingungen bei Kavitäten

Nachdem diese Arbeit bereits die erfolgreiche Anwendung von Harmonic Balance in Kombination mit der Frequenzsuchstrategie für den akademischen Testfall eines laminar umströmten Zylinders dargelegt hat, sollen in diesem Kapitel zwei Kavitäten untersucht werden. Dabei ist die Tauglichkeit für Harmonic Balance fragwürdig, da es sich bei Kavitäten um neuartige und weitaus komplexere Testfälle im Vergleich zum Zylinder für das Frequenzbereichsverfahren handelt. Die erhöhte Komplexität begründet sich dadurch, dass die auftretenden Strömungsphänomene von Turbulenz getrieben sind, was den erfolgreichen Einsatz von RANS-Gleichungen, welcher bedingt durch Harmonic Balance ist, unsicher macht.

Die ersten wissenschaftlichen Arbeiten zu Kavitäten stammen aus der Luftfahrt. Insbesondere trieben militärische Projekte, welche Bombenschächte an Flugzeugen untersuchten, die Forschung voran. Motiviert waren diese Bemühungen dadurch, dass eine solche Kavität einerseits ein Pitch-Moment erzeugt und somit ein Eingriff in das Flugverhalten bedeutet und andererseits Schwingungsphänomene verursacht, welche nach Tracy, [38], zu strukturellen Vibrationen führen können. Ein weiteres Themengebiet, in dem Kavitäten eine Rolle spielen ist die Akustik. Beispielsweise können nach de Jong, [8], an Türspalten von Automobilen unerwünschte akustische Wellen entstehen, die zu Lärm im Inneren und außerhalb der Fahrzeugkabine führen können.

4.1. Physikalische Grundlagen und empirische Modelle

Bevor eine Einteilung der strömungsmechanischen Vorgänge bei Kavitäten gemacht wird, soll hier vorab auf geometrische Größen und fluiddynamische Begrifflichkeiten eingegangen werden. Die Ausführungen in dieser Arbeit beschränken sich auf rechteckige Kavitäten, welche durch eine Länge (L), eine Tiefe (T) und eine Breite (W) vollständig beschrieben werden können. Aufgrund einer besseren Übersichtlichkeit ist die Breite in Abbildung 4.1 nicht dargestellt.

Die Anströmung der Kavität findet über eine reibungsbehaftete Wand statt. Aus diesem Grund bildet sich eine Grenzschicht mit der Dicke (δ) aus. In einem ausreichend großen vertikalen Abstand zur Kavität, liegt oberhalb dieser Grenzschicht die Anströmgeschwindigkeit (u_∞) vor. An der Vorderkante des Hohlraums löst die Grenzschicht ab und überbrückt ihn teilweise oder vollständig. Während des Überbrückens bezeichnet man die abgelöste Grenzschicht als Scherschicht.

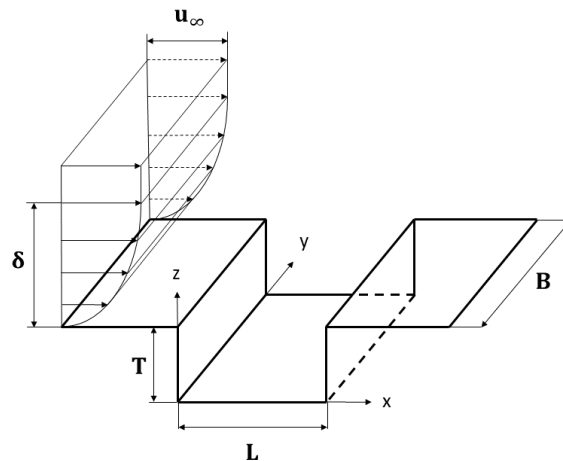


Abb. 4.1.: 3D-Skizze einer rechteckigen Kavität mit geometrischen und strömungsmechanischen Größen.

Einteilung von Kavitäten

Die sich einstellenden Strömungsphänomene in rechteckigen Kavitäten sind vom Verhalten der Scherschicht beim Überströmen der Kavität abhängig. Mithilfe des Druckverlaufs am Boden der Kavität, unterteilt Tracy, [38], in zwei Hauptgruppen: offene und geschlossene Kavitäten. Zusätzlich definiert er im Übergangsbereich zwei weitere Gruppen, welche hier aber nicht aufgeführt werden.

Bei offenen Kavitäten löst die Grenzschicht an der Vorderkante der Kavität ab, überbrückt sie und trifft auf ihre Rückwand oder überbrückt den Hohlraum vollständig. Dabei bildet sich innerhalb des Hohlraums ein dominantes Zirkulationsgebiet aus. Der charakteristische Verlauf des Druckbeiwertes am Boden der Kavität ist größtenteils konstant, wobei bei Annäherung an die Rückwand ein Durckanstieg zu verzeichnen ist (vgl. Abb. 4.2). Des Weiteren sind ausschließlich positive c_p -Werte kennzeichnend.

Dem gegenüber steht ein Scherschichtverhalten, bei dem die Scherschicht die Kavität nicht überbrückt sondern auf ihrem Boden auftrifft. Dieser Typ von Kavität wird als geschlossen bezeichnet. Infolge eines steigenden Drucks in Richtung der Rückwand, löst die Strömung vom Boden wieder ab und verlässt den Hohlraum oberhalb der Hinterkante. Im Bereich des ersten Ablösens und Anlegens bildet sich ein Wirbel aus, während stromab ein weiteres Zirkulationsgebiet unterhalb der Scherschicht vorliegt. Der c_p -Verlauf am Boden weist im Bereich der Vorderkante negative Werte auf, die bis zum Auftreffen der Grenzschicht auf dem Boden ansteigen, sodass hier der Druck oberhalb des Umgebungsdrucks liegt. Im Bereich, in dem die Strömung am Boden anliegt, sind kaum Druckänderungen feststellbar. Bei Annäherung an die Rückwand steigt der c_p -Verlauf bis zu seinem Maximum an der Position der Rückwand an.

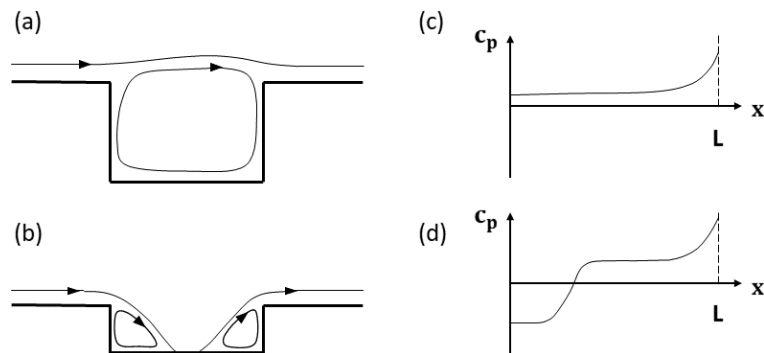


Abb. 4.2.: Schematische Darstellung der Stromlinien bei Kavitäten und Druckverteilung am Boden der Kavität für den Typ: offen (a bzw. c) und geschlossen (b bzw. d).

Zusätzlich zu der Einteilung in Abhängigkeit des Druckverlaufs präsentiert Tracy eine geometrische Einteilung, die auf dem Verhältnis von Länge zu Tiefe basiert: L/T . Da allerdings die Art der Überströmung ebenfalls stark von den Anströmbedingungen abhängt, können keine diskreten Grenzen definiert werden und die Angaben besitzen ihre Gültigkeit lediglich im subsonischen Bereich. Für L/T unterhalb von 6 bis 8 liegt der offene Fall vor, während sich für Werte oberhalb von 8 bis 11 die geschlossene Kavität einstellt.

Selbst-erregte Schwingungen

Im Rahmen dieser Arbeit sind offene Kavitäten von Interesse, da hier sich selbst-erhaltende Druckschwankungen auftreten können. Die strömungsmechanischen Phänomene sind in Abbildung 4.3 schematisch dargestellt.

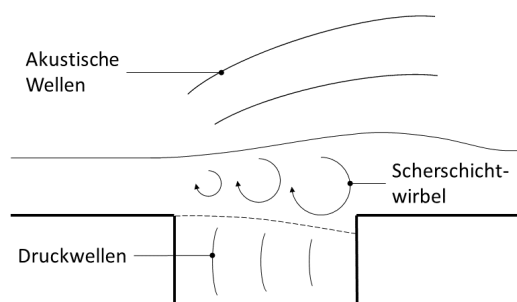


Abb. 4.3.: Skizzenhafte Darstellung des Rückkopplungsmechanismus bei einer Kavität.

Der Mechanismus der die Schwankungen innerhalb und außerhalb der Kavität erregt und aufrechterhält, wird als Rückkopplungsprozess bezeichnet und wird im Folgenden nach Rockwell, [30], beschrieben.

- Durch das Auftreffen der Scherschicht an der Rückwand der Kavität werden Druckstörungen generiert, die sich dann stromaufwärts ausbreiten.
- Nahe dem Ablösepunkt der Grenzschicht hat die Scherschicht ihre maximale Sensitivität gegenüber Störungen. Aus diesem Grund werden hauptsächlich hier aufgrund der eintreffenden Druckwellen Störungen in die Scherschicht induziert.
- Infolgedessen formiert sich eine geordnete Wirbelstruktur in der Scherschicht, die nach Gloerfelt, [13], einer Kelvin Helmholtz Instabilität ähnelt.
- Während des Transports dieser Strukturen mit der Scherschicht, wird die Instabilität verstärkt.
- Der an der Rückwand auftreffende Wirbel generiert eine neue Druckschwankung, wodurch sich ein fortlaufender Zyklus einstellt.

Eine ständige Wiederholung des beschriebenen Prozesses führt dazu, dass die Wiederholungsrate der eintreffenden Wirbel an der Rückwand identisch mit der Frequenz der ausgesendeten Druckschwankungen ist (engl. lock-in). Es kommt zu einer Synchronisation der beiden Frequenzen, sodass das Phänomen bei mehreren Anregungsfrequenzen auftreten kann.

Rockwell identifizierte mehrere treibende Faktoren, welche den Mechanismus beeinflussen: das Verhältnis von Länge zu Tiefe (L/T), die Geschwindigkeit der freien Anströmung (u_∞), die Grenzschichtdicke (δ) und der turbulenter Zustand bzw. die Reynolds-Zahl.

Außerdem ist der Prozess unabhängig von initialen Störungen der ankommenden Grenzschicht, d.h. sowohl turbulente als auch laminare Strömungen können nach Gloerfelt, [13], selbst-erregte Schwingungen produzieren. Darüber hinaus ist die initiale Anregung für schwach turbulente oder laminare Grenzschichten wahrscheinlicher als für voll-turbulente Grenzschichten, da Grenzschichten mit geringerer Reynolds-Zahl sensitiver gegenüber Störungen sind.

Empirisches Modell nach Rossiter

Die erste modellhafte Beschreibung der sich einstellenden Frequenz der selbst-erregten Schwingung stammt von Rossiter, [32], und ist aus sub- und transsonischen Untersuchungen abgeleitet. Aus diesem Grund ist das Modell ebenfalls auf diesen Ma -Bereich eingeschränkt. Am Rande sei die Erweiterung des Modells nach Heller, [17], erwähnt, welche für supersonische Strömungen angewendet werden kann.

Eine grundlegende Annahme des Modells nach Rossiter ist, dass sich die Druckschwankungen innerhalb der Kavität mit Schallgeschwindigkeit (c) ausbreiten. Des Weiteren wird die konvektive Geschwindigkeit mit der die Wirbel in der Scherschicht transportiert werden, als ein Vielfaches (ξ) der Anströmgeschwindigkeit (u_∞) betrachtet. Zusätzlich bezeichnet man die

Wellenlänge der Druckwellen mit λ_a und den Abstand zwischen den Wirbel in der Scherschicht mit λ_v . Darüber hinaus setzt man voraus, dass der Einschwingvorgang bereits vergangen ist, d.h. man befindet sich im „lock-in“, folglich entsprechen sich die Frequenzen der eintreffenden Wirbel und der von der Rückwand ausgesendeten Wellen.

$$f = \frac{c}{\lambda_a} = \frac{\xi u_\infty}{\lambda_v} \quad (4.1)$$

Die Phasenbeziehung von Wirbeln und Druckwellen ist unbekannt, weshalb man eine weitere Konstante (η) einführt. Man legt fest, dass zu einem Zeitpunkt ($t = 0$) an dem eine Druckwelle an der Hinterkante abgestrahlt wird, der verursachende Wirbel bereits um die Länge ($\eta\lambda_v$) von der Hinterkante stromabwärts transportiert wurde (vgl. Abb. 4.4).

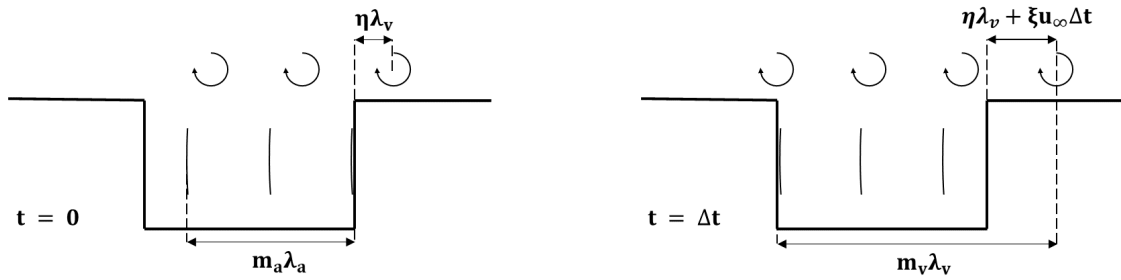


Abb. 4.4.: Rossiters Modell der Kavitätenüberströmung bei $t = 0$ (links) und bei $t = \Delta t$ (rechts).

Schreitet man in der Zeit um Δt bis zum Eintreffen einer Druckwelle an der Vorderkante voran, ergibt sich, dass der genannte Wirbel um die Strecke $\xi u_\infty \Delta t$ von seiner vorigen Position stromabwärts verschoben ist. Ebenso hat sich die Formation aus Druckwellen um die Länge $c\Delta t$ verschoben (vgl. Abb. 4.4).

Setzt man voraus, dass eine Anzahl von m_v Wirbeln und m_a Druckwellen involviert sind, lässt sich eine Gleichung für die Wirbel (4.2) und eine weitere für die Druckwellen (4.3) zum Zeitpunkt $t = \Delta t$ aufstellen.

$$m_v \lambda_v = L + \eta \lambda_v + \xi u_\infty \Delta t \quad (4.2)$$

$$L = m_a \lambda_a + c \Delta t \quad (4.3)$$

Eliminiert man Δt durch Gleichsetzen der Beziehungen für die Wirbel (4.2) und Druckwellen (4.3) und führt den Zusammenhang (4.1) für das „lock-in“ ein, erhält man:

$$(m_v - \eta + m_a) \frac{\lambda_v}{\xi u_\infty} = \frac{L}{c} + \frac{L}{\xi u_\infty}. \quad (4.4)$$

Für das weitere Vorgehen trifft man eine Vereinfachung, mit der Annahme, dass die statische Temperatur der freien Anströmung näherungsweise identisch zur statischen Temperatur in der Kavität ist. Zieht man zusätzlich in Betracht, dass der Wirbel in der Kavität aufgrund der niedrigen Strömungsgeschwindigkeiten schwach ist, ist diese Annahme legitim. Folglich sind die Schallgeschwindigkeiten von Anströmung und Kavität bzw. Druckwelle (c) näherungsweise gleich.

$$Ma \approx \frac{u_\infty}{c} \quad (4.5)$$

Da es sich bei m_a und m_v um beliebig gewählte ganze Zahlen handelt, lassen sich beide Parameter zu einem zusammenfassen: $m = m_a + m_v$. Setzt man schließlich die Machzahl (4.5) und die Frequenz (4.1) in den Zusammenhang (4.4) ein, erhält man das Modell von Rossiter.

$$f = \frac{u_\infty}{L} \frac{m - \eta}{Ma + \frac{1}{\xi}} \quad (4.6)$$

Aus seinen Messungen ermittelte Rossiter die Konstanten des Modells für $L/T < 4$ zu: $\xi = 0,57$ und $\eta = 0,25$.

Resonatoren

Die zuvor beschriebenen, selbst-erregten Schwingungen können als Anregung für Resonanz fungieren. In den meisten Fällen ist Resonanz unerwünscht, da es zu einer erhöhten akustischen Abstrahlung und zu verstärkten strukturellen Vibrationen kommen kann. Deshalb wurden in der Vergangenheit Bemühungen unternommen, dieses Phänomen näher zu untersuchen. Es konnten zwei Resonatoren identifiziert werden: der Helmholtz Resonator und stehende Wellen, wobei auf letztere hier eingegangen wird.

Stehende Wellen: Ahuja, [1], identifiziert in seiner wissenschaftlichen Arbeit stehende Wellen innerhalb der Kavität als Ursache der Resonanz.

Grundsätzlich entstehen diese Art von Wellen dadurch, dass z.B. eine akustische Welle an einer schallharten Wand reflektiert wird. Die zurückgeworfene Welle überlagert sich mit der ursprünglichen Welle, was in Abhängigkeit vom Wandabstand und der Frequenz zur Verstärkung bzw. Auslöschung der Schallamplitude führen kann. Eine stehende Welle liegt dann vor, wenn infolge der Überlagerung an einer ortsfesten Position die Auslenkung zu jedem Zeitpunkt null ist.

Für Wellen, die sich mit Schallgeschwindigkeit (c) ausbreiten, kann nach Ahuja die benötigte Frequenz, um stehende Wellen hervorzurufen, entsprechend Gleichung (4.7), bestimmt werden. Dabei kennzeichnet n_x , n_y und n_z die ganzzahligen Moden der jeweiligen Richtungen im kartesischen Raum.

$$f = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{n_x}{L}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{B}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{2T}\right)^2} \quad (4.7)$$

Es sei darauf verwiesen, dass für die z -Richtung die doppelte Tiefe der Kavität in der Formel auftritt, da die Scherschicht bei der Kavität ein schallweiches Ende darstellt und sich hier im Gegensatz zu einem schallharten Ende kein Knoten sondern ein Maximum ausbildet. Folglich liegt für den ersten Tiefenmode ($n_z = 1$) eine stehende Welle mit einer viertel Wellenlänge vor. Daher bezeichnet man eine Kavität, die diesen Mode anregt, als $\lambda/4$ -Resonator.

Motivation für Harmonic Balance

Die physikalischen Grundlagen zu den Kavitäten beschreiben, dass sich in Kavitäten selbst erhaltende Schwingungen einstellen können. Bei gleichbleibenden Randbedingungen kann sich ein periodisches Schwingungsverhalten ausbilden, was an einem exemplarischen Spektrum in Abbildung 4.5 zu erkennen ist.

Die erste Signalspitze liegt bei der Fundamentalfrequenz von ungefähr 2000Hz, während die folgenden Spitzen ganzzahlige Vielfache davon sind. Damit ist die Voraussetzung der Periodizität für Harmonic Balance erfüllt. Darüber hinaus bietet das Modell von Rossiter (4.6) die Möglichkeit die sich einstellende Fundamentalfrequenz der Kavität abzuschätzen.

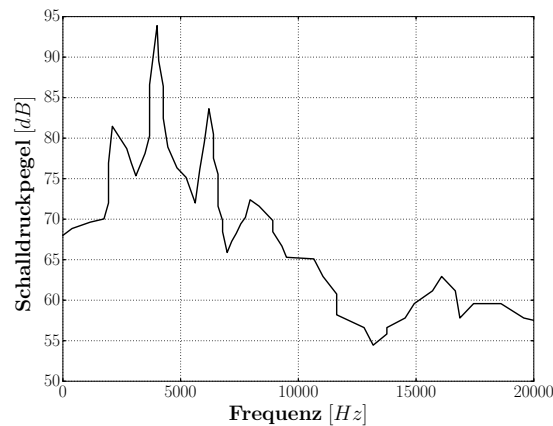


Abb. 4.5.: Exemplarisches Spektrum einer rechteckigen Kavität mit $L/T = 2,5$ und $Ma = 0,4$ (reproduziert nach Ahuja, [1]).

4.2. Simulation einer tiefen Kavität

Als Erstes soll in diesem Kapitel eine offene Kavität betrachtet werden, die bei den zu untersuchenden Anströmbedingungen ein Resonanzverhalten aufzeigt. Infolge der Anregung durch den Rückkopplungsprozess mit den Wirbeln in der Scherschicht bilden sich in Richtung der Tiefe stehende Wellen aus, die aus einer Viertel Wellenlänge bestehen. Die Kavität, die das Verhalten eines $\lambda/4$ -Resonators aufzeigt, ist der wissenschaftlichen Arbeit von Kuhn, [22], nachempfunden. Dort wird der Anwendungsfall einer Fuge in der Karosserie eines Automobils mithilfe von LES numerisch berechnet.

4.2.1. Numerisches Setup

Geometrie und Strömungsbedingungen

Die rechteckige Kavität lässt sich entsprechend Abbildung 4.1 mit der Länge $L = 25\text{mm}$, der Tiefe $T = 50\text{mm}$ und der Breite $B = 30\text{mm}$ geometrisch vollständig beschreiben. Aus dem Verhältnis $L/T = 0,5$ folgt nach Gloerfelt, [13], dass es sich um eine tiefe Kavität handelt.

Infolge der Anströmung über eine ebene reibungsbehaftete Platte mit $Ma_\infty = 0,14$ bildet sich eine Grenzschicht aus. Dafür gibt Kuhn an der Position $x = -35\text{mm}$, d.h. stromaufwärts der Kavität die Grenzschichtdicke (δ), die Verdrängungsdicke (δ^*), die Impulsverlustdicke (θ) und den Formfaktor (H) an (siehe Tab. 4.1).

Nach Schlichting, [33], liegt bei einer ebenen Platte mit einem Formfaktor von 1,3 eine turbulente Grenzschicht vor, wohingegen sich aus der Blasius-Gleichung für laminare Grenzschichten ein Wert von 2,59 ergibt. Demzufolge wird die Kavität mit einem turbulenten Geschwindigkeitsprofil angeströmt. Das dabei betrachtete Fluid ist Luft bei ISA-Standardbedingungen, sodass die Anströmgeschwindigkeit mit $u_\infty = 48,4\text{m/s}$ angegeben werden kann.

Rechennetz und Randbedingungen

Die Abmessungen des Rechengebiets betragen das 16-fache der Länge der Kavität in x -Richtung stromaufwärts und -abwärts. Außerdem ist das 10-fache der Länge als Höhe oberhalb der Kavität gewählt.

Die vollständige Vernetzung des Strömungsgebiets, welche aus 40000 Hexaedern aufgebaut ist, findet sich im Anhang G. Zusätzlich ist im Folgenden eine Detailansicht des Netzes innerhalb der Kavität dargestellt (siehe Abb. 4.6). Es wird ein zweidimensionales Strömungsfeld angenommen, sodass in y -Richtung lediglich eine Zellschicht vorliegt. Außerdem handelt es sich bei den Begrenzungen normal zu dieser Richtung um periodische Randbedingungen.

Die Wände, über die der Hohlraum angeströmt wird, sind als reibungsbehaftete Randbedingungen aufgesetzt. Ebenso handelt es sich bei den Wänden der Kavität um viskose Randbedingungen. Dabei gewährleistet die Vernetzung des Gebiets für alle viskosen Ränder $y^+ < 1$. Der Abschluss des Rechengebiets in z -Richtung bzw. oberhalb der Kavität ist mittels Fernfeldrandbedingungen realisiert.

Um Rechenzeit zu sparen, wird an der Eintrittsebene ein Strömungsprofil vorgeschrieben, welches aus einer Simulation über eine reibungsbehaftete ebene Platte mit einer Lauflänge von 0,76m stammt. An der Austrittsebene wird der statische Druck der ISA-Standardatmosphäre vorgeschrieben.

Bezüglich der Turbulenzbehandlung kommen die URANS¹-Gleichungen mit dem SST²-Modell von Menter zum Einsatz. Für nähere Informationen zu dieser Wahl sei der Leser auf Abschnitt 4.3.1 verwiesen. Außerdem finden sich weitere Informationen zu den Randbedingungen, der Initialisierung und den Konfigurationen des Strömungslösers im Anhang G.

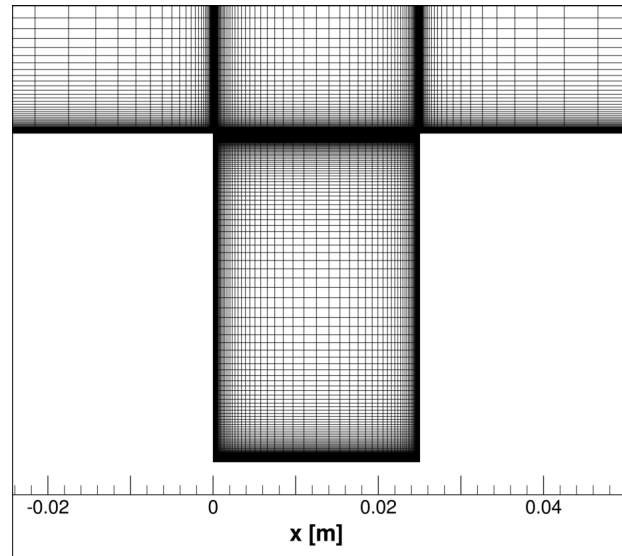


Abb. 4.6.: Zweidimensionale Darstellung der Vernetzung des Rechengebiets im Bereich der Kavität mit $L/T = 0,5$.

4.2.2. Simulationsergebnisse

In der nachfolgenden Abbildung 4.7 ist das Grenzschichtprofil an der Position $x = -35\text{mm}$ vor der Kavität dargestellt. Zusätzlich zu den Geschwindigkeitswerten ist das Kriterium zur Bestimmung der Grenzschichtdicke $u/u_\infty = 0,99$ eingetragen. Außerdem wird durch eine horizontale Linie die Dicke der Grenzschicht von Kuhn gekennzeichnet. Für einen quantitativen Vergleich ist die Grenzschichtdicke aus dieser Arbeit in Tabelle 4.1 aufgeführt.

¹Unsteady Reynolds-Averaged Navier-Stokes

²Shear Stress Transport

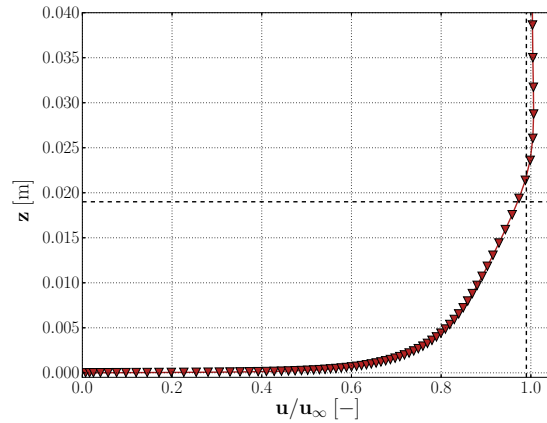


Abb. 4.7.: Grenzschichtprofil der Geschwindigkeit an der Position $x = -35\text{mm}$ vor der Kavität mit $L/T = 0,5$.

Zusätzlich dazu führt die Tabelle die Verdrängungsdicke, die Impulsverlustdicke und den Formfaktor auf. Zur Berechnung der Parameter wird auf die Gleichungen (4.8) von Ahuja verwiesen. Dafür sei Δz_i der Abstand zwischen zwei diskreten Geschwindigkeiten (u_{i-1} und u_i). Die Summation wird bis zum Erreichen der Grenzschichtdicke durchgeführt, wobei I über den folgenden Zusammenhang definiert ist: $\delta \geq \sum_{i=1}^I \Delta z_i$.

$$\delta^* = \sum_{i=1}^I \Delta z_i \left(1 - \frac{u_i}{u_\infty}\right), \quad \theta = \sum_{i=1}^I \Delta z_i \frac{u_i}{u_\infty} \left(1 - \frac{u_i}{u_\infty}\right), \quad H = \frac{\delta^*}{\theta} \quad (4.8)$$

Aus der Tabelle geht hervor, dass die im Rahmen dieser Arbeit verwendete Grenzschicht dicker ist und gleichzeitig geringere Werte für die Verdrängungs- und Impulsverlustdicke hat als die Referenz. Zusätzlich unterschätzt die Simulation mit TRACE den Formfaktor.

Tab. 4.1.: Parameter der Grenzschicht aus der Simulation mit TRACE und von Kuhn, [22].

	δ in [mm]	δ^* in [mm]	θ in [mm]	H in [–]
Kuhn	19	3,21	2,33	1,38
TRACE	21,9	2,8	2,1	1,3

Von einer Druckmessstelle an der Rückwand des Hohlraums auf der Höhe von $z = 12,7\text{mm}$ ist im weiteren Verlauf das Drucksignal dargestellt (siehe Abb. 4.8). Zu Simulationsbeginn bilden sich Druckschwankungen aus, welche allerdings mit fortschreitender Zeit gedämpft werden, bis sich ein stationäres Verhalten einstellt.

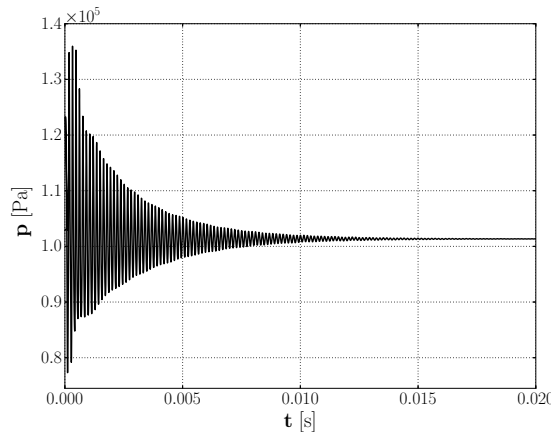


Abb. 4.8.: Zeitlicher Druckverlauf an der Rückwand der Kavität an der Stelle $z = 12,7\text{mm}$.

Es sei erwähnt, dass anstelle von zu erwartenden Schwingungen in Tiefenrichtung, die Oszillationen entlang der Länge auftreten. Aufgrund der ausbleibenden Anregung in Tiefenrichtung bilden sich keine stehenden Wellen aus, sodass keine Resonanz auftritt. Außerdem stellt sich für $t > 0,015\text{s}$ im gesamten Strömungsfeld ein stationäres Verhalten ein.

Diskussion der Ergebnisse

Zu Beginn muss festgestellt werden, dass es sich bei der Simulation der tiefen Kavität um einen Fehlschlag handelt. Es ist zwar mit dem beschriebenen Setup möglich Schwingungen darzustellen, allerdings bilden diese sich nicht entlang der Tiefe aus und sie erhalten sich auch nicht selbst bzw. werden über die Zeit vollständig gedämpft.

Mit einer skalenauflösenden numerischen Berechnung kann Kuhn das physikalische Strömungsphänomen abbilden. Jedoch beschränkt sich in dieser Arbeit die Turbulenzbehandlung aufgrund der Kombination mit Harmonic Balance auf die statistische Behandlung mittels URANS-Gleichungen (vgl. Abs. 2.5.2). Dabei wird der Effekt von kleinskaligen Fluktuationen auf die makroskopische Hauptströmung mittels einer künstlichen Viskosität modelliert, d.h. diese Fluktuationen werden nicht aufgelöst. Aus dem Grund der getrennten Behandlung der Skalen wird vermutet, dass bei der betrachteten Kavität eine breitbandige Anregung durch die kleinskaligen Fluktuationen vorliegt und sich deshalb keine dauerhafte Rückkopplung einstellt. In diesem Zusammenhang ist der Einfluss der Grenzschichtdicke anzuführen. Ahuja, [1], stellt aus Fernfeldmessungen an einer Kavität fest, dass mit steigender Grenzschichtdicke die Amplituden der akustischen Wellen, welche von der Kavität abgestrahlt werden, abnehmen. Bereits für einen Wert von $\delta/L = 0,066$ sind für seinen experimentellen Aufbau keine akustischen Wellen im Fernfeld messbar. Dadurch wird die dämpfende Einfluss der Scherschicht oberhalb der Kavität verdeutlicht.

Im vorliegenden Fall mit $\delta/L = 0,76$ müsste demnach die dämpfende Wirkung der Scherschicht besonders stark sein. In Kombination mit einer weiteren Dämpfung durch eine mögliche fehlerhafte Modellierung der künstlichen Viskosität, wird daher vermutet, dass die initial in die träge Scherschicht eingebrachten Störungen nicht ausreichend sind, um makroskopische Änderungen hervorzurufen. Eine solche Änderung könnte sich als ein Schwingen der Scherschicht äußern, die mittels URANS-Gleichungen abgebildet werden könnten. Als Folge der Hemmung von initialen Störungen kann sich der Rückkopplungsprozess nicht ausbilden, der gleichzeitig Voraussetzung für die Resonanz ist.

Dazu sei angefügt, dass die Simulationen von Kuhn zwar akustische Abstrahlungen und makroskopische Schwankungen der Scherschicht aufweisen, jedoch könnten diese erst durch den Resonanzeffekt mit dem Tiefenmode entstehen und nicht aus den initialen Störungen.

Des Weiteren soll der Einfluss von dreidimensionalen Effekten genannt werden. Ahuja postuliert, dass für $L/B < 1$ diese Effekte vernachlässigbar sind und daher im Testfall kohärente Strukturen entlang der Kavitätenbreite vorliegen sollten. Trotzdem wären aufgrund der Nähe zum Grenzwert mit $L/B = 0,83$ Auswirkungen denkbar, sodass eine 2D-Betrachtung mit einer unendlichen Fortsetzung durch periodische Ränder eine Fehlerquelle darstellen könnte.

Die letzte Problematik entsteht durch die niedrigen Mach-Zahlen in der Größenordnung von 10^{-3} innerhalb der Kavität. Wie bereits mehrfach erwähnt, liegt in diesen Fällen für einen kompressiblen Strömungslöser wie TRACE ein schlecht konditioniertes Gleichungssystem vor, was bei seiner Lösung zu Genauigkeitsverlusten führt.

4.3. Simulation einer flachen Kavität

Dieser Abschnitt behandelt eine weitere offene Kavität, die subsonisch angeströmt wird. Da die Untauglichkeit der zuvor behandelten tiefen Kavität (vgl. Abs. 4.2) in Kombination mit statistischer Turbulenzbehandlung hauptsächlich auf den Einfluss der Grenzschichtdicke zurückgeführt wird, liegt die relative Dicke bei dieser Kavität im Vergleich zur tiefen Kavität um den Faktor 10 darunter ($\delta/L = 0,073$). Im Detail wird ein experimenteller Testfall von Ahuja, [1], betrachtet, für den ebenfalls Simulationsdaten von Ashcroft, [2], vorliegen.

Analog zum Vorgehen beim Zylinder (siehe Abs. 3) wird zuerst der Testfall mit Zeitbereichsverfahren berechnet und anschließend, aufbauend auf diesem numerischen Setup, Harmonic Balance angewendet. Wie bereits eingangs erwähnt (vgl. Abs. 4.1) eignet sich der Testfall für das Frequenzbereichsverfahren, da die selbst-erhaltenden Schwingungen einer offenen Kavität periodisch sind.

4.3.1. Numerisches Setup

Geometrie und Strömungsbedingungen

Entsprechend der geometrischen Größen aus Abbildung 4.1 beträgt die Länge der Kavität $L = 31,8\text{mm}$, die Tiefe $T = 12,7\text{mm}$ und die Breite $B = 101,6\text{mm}$. Daraus erhält man das Verhältnis $L/T = 2,5$, was nach Gloerfelt, [13], als flache Kavität ($L/T > 1$) eingeordnet wird. Außerdem stellt Ahuja fest, dass in Richtung der Breite kohärente Instabilitäten vorliegen, wenn $L/B < 1$ ist. Folglich liegen in dieser Richtung keine Änderungen vor, was dazu motiviert die Kavität ausschließlich zweidimensional zu behandeln.

Die Anströmung findet über eine ebene Platte statt, wobei die Mach-Zahl bei 0,26 liegt. Dabei entwickelt sich eine Grenzschicht, für die Ahuja bei 3,175mm vor der Kavität die Grenzschichtdicke (δ), die Verdrängungsdicke (δ^*) sowie die Impulsverlustdicke (θ) angibt (siehe Tab. 4.2). Aus der Betrachtung des vorigen Abschnitt 4.2.1 kann aus dem Formfaktor auf ein turbulentes Grenzschichtprofil geschlossen werden. Außerdem wird als Fluid Luft bei ISA-Standardbedingungen für die Simulation angenommen, sodass die Anströmgeschwindigkeit mit $u_\infty = 88,5\text{m/s}$ angegeben werden kann.

Rechennetz und Randbedingungen

Die Ränder des Rechengebiets sind so platziert, dass es möglich ist, zwei vollständige Wellenlängen einer akustischen Abstrahlung von der Kavität darzustellen. Mit der niedrigsten dominanten Frequenz (f) aus den experimentellen Daten erhält man dann mit

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (4.9)$$

den Abstand zur Kavität als ungefähr das 13-fach der Kavitätenlänge (L). Dabei bezeichnet c die Schallgeschwindigkeit.

Wie bereits erwähnt, können dreidimensionale Effekte vernachlässigt werden, weshalb das Rechengebiet mit einer Zellschicht in Richtung der Breite (B) realisiert wird. Außerdem werden die Seitenwände, welche senkrecht zu dieser Richtung liegen, durch reibungsfreie Wandrandbedingungen modelliert.

Die Kavitätenwände sowie die Wand, über welche die Strömung das Rechengebiet wieder verlässt, werden als viskose Wände dargestellt. Des Weiteren ist eine Länge von 74,7mm vor der Kavität ebenfalls eine reibungsbehaftete Wand, während der verbleibende Teil der Wand, über welche die Kavität angeströmt wird, mit einer reibungsfreien Wand modelliert wird. Dabei ist die viskose Anlaufänge so definiert, dass sich eine Grenzschichtdicke entsprechend Tabelle 4.2 einstellt.

Der Wandabstand der ersten Zelle oberhalb aller viskosen Wände gewährleistet $y^+ < 1$. Außerdem ist die Vernetzung so gewählt, dass die Grenzschicht vor der Kavität mit 30 Zellen dargestellt werden kann. Eine Darstellung des Rechennetzes im Bereich der Kavität ist in Abbildung 4.9 gegeben.

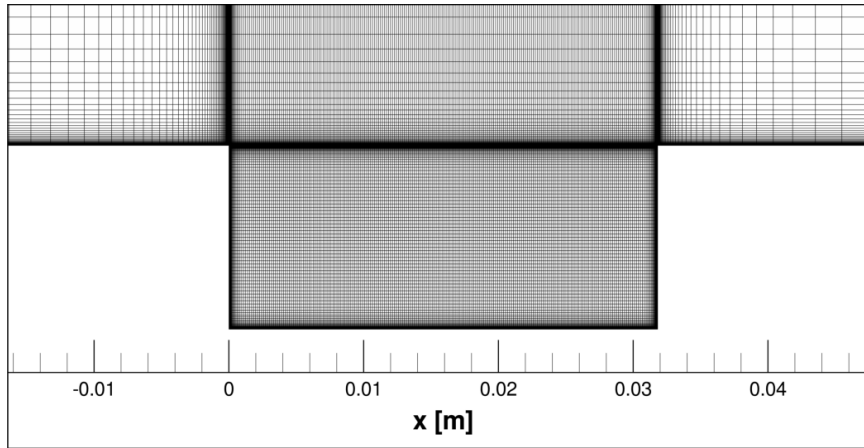


Abb. 4.9.: Zweidimensionale Darstellung der Vernetzung des Rechengebiets im Bereich der Kavität mit $L/T = 2,5$.

Beim Abschluss des Rechengebiets oberhalb der Kavität kommt eine reibungsfreie Wand zum Einsatz. Zwischen dieser Begrenzung und der Anströmwand sind 68 Zellen platziert, um mit steigendem Abstand zur Kavität eine gröbere Auflösung zu erhalten. Analog dazu wird die Zellgröße in x -Richtung bei Annäherung an den Ein- bzw. Ausströmrand erhöht. Somit liegt ein Vernetzung bestehend aus ca. 52000 Hexaedern vor.

Konfigurationen des Strömungslösers

Es wurde zuvor erwähnt, dass die Kavität turbulent angeströmt wird. Dafür ist es notwendig eine Turbulenzbehandlung einzuführen. Im Hinblick auf die Anwendung von Harmonic Balance sind skalenauflösende Verfahren (LES bzw. DNS) nicht geeignet, da man nach Ashcroft, [3], den Vorteil eines reduzierten Rechenaufwands gegenüber Zeitbereichsverfahren verliert. Der Grund dafür ist, dass bei diesen Verfahren breitbandige Spektren vorliegen, welche mit einer

Vielzahl von Frequenzen in Harmonic Balance beachtet werden müssen. Folglich wird auf die RANS-Gleichungen zurückgegriffen und das k - ω -Modell angewendet.

Eine vollständige Visualisierung des Rechengebiets, Details zu den Ein- und Ausströmrandbedingungen sowie die Konfigurationen bezüglich des Zeitbereichs- bzw. Frequenzbereichsverfahren sind im Anhang H aufgeführt. Bei den Modifikationen zu Harmonic Balance handelt es sich bezüglich der Fundamentalfrequenz und dem harmonischen Set um ein exemplarisches Setup.

Zusätzlich sei angemerkt, dass die CFL -Zahl klein und die Anzahl von Iterationen pro Zeitschritt groß gewählt ist, um Ungenauigkeiten aufgrund des schlecht konditionierten Systems im Kontext von geringen Strömungsgeschwindigkeiten innerhalb der Kavität zu vermeiden.

4.3.2. Simulationsergebnisse - Zeitbereichsverfahren

Grenzschichtprofil

Die Untersuchungen der Grenzschicht von Ahuja sind an der Position $x = -3,175\text{mm}$ durchgeführt. An dieser Stelle liegen aufgrund der akustischen Abstrahlung der Kavität zeitabhängige Schwankungen vor, was in Abbildung 4.10 visualisiert ist. Bei den farbigen Verläufen handelt es sich um das Geschwindigkeitsprofil zu verschiedenen Zeitpunkten in einer Periode. Zusätzlich kennzeichnet die schwarze Linie den zeitlichen Mittelwert dieser Schwankungen.

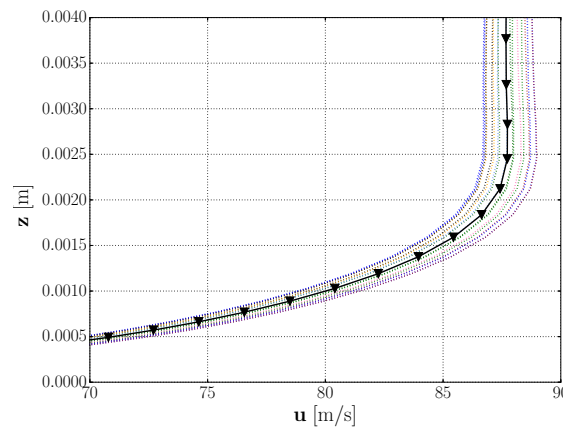


Abb. 4.10.: Visualisierung der Fluktuationen (bunt) und des zeitlichen Mittelwerts (schwarz) des Grenzschichtprofils der Geschwindigkeit an der Position $x = -3,175\text{mm}$ vor der Kavität.

Zur Bestimmung der Grenzschichtparameter aus Tabelle 4.2 wird im Folgenden das gemittelte Profil betrachtet, welches in Abbildung 4.11 dargestellt ist. Dabei ist das Geschwindigkeitsprofil auf die Anströmgeschwindigkeit (u_∞) bezogen. Zusätzlich ist das Kriterium zur Identifikation der Grenzschichtdicke: $u/u_\infty = 0,99$ und die von Ahuja ermittelte Dicke der Grenzschicht eingezeichnet.

Aus der Detailansicht des Graphen geht hervor, dass qualitativ die Grenzschichtdicke des Experiments erreicht wird. Dazu sei erwähnt, dass aufgrund der räumlichen Diskretisierung die Abtastpunkte nahe der gewünschten Dicke der Grenzschicht bei $z = 2,13\text{mm}$ und bei $z = 2,45\text{mm}$ liegen. Mithilfe einer linearen Interpolation kann in Tabelle 4.2 der Abstand von der Wand ($z = 0$), für den $u/u_\infty = 0,99$ erreicht wird, angegeben werden.

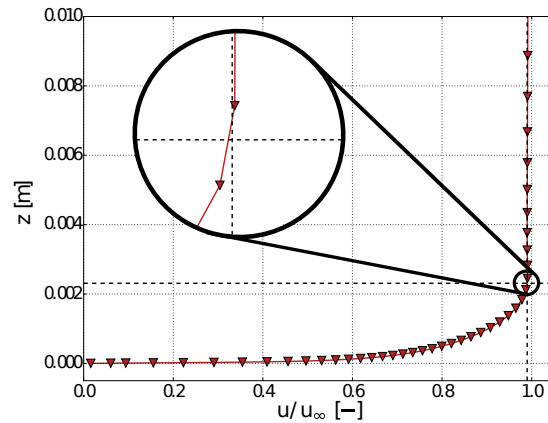


Abb. 4.11.: Zeitgemitteltes Grenzschichtprofil, experimentell ermittelte Grenzschichtdicke von Ahuja (horizontale Linie) und das Kriterium: $u/u_\infty = 0,99$ zur Erkennung dieser Dicke (vertikale Linie).

Die verbleibenden Grenzschichtparameter werden entsprechend der zuvor angegebenen Gleichungen (4.8) berechnet und sind in Tabelle 4.2 aufgelistet. Bezüglich der Dicke der Grenzschicht konnte eine Übereinstimmung bis auf 2,2% erreicht werden, jedoch sind die Abweichungen für die Verdrängungs- und Impulsverlustdicke größer, sodass der Formfaktor eine Diskrepanz von 21,5% aufweist.

Tab. 4.2.: Parameter der Grenzschicht aus der Simulation mit TRACE und des Experiments von Ahuja, [1].

	δ in [mm]	δ^* in [mm]	θ in [mm]	H in [—]
Experiment	2,309	0,215	0,187	1,1519
TRACE	2,36	0,281	0,201	1,4

Strömungsfeld

Wie zuvor in Abschnitt 4.1 beschrieben, stellt sich ein selbst-erhaltender Schwingungsprozess ein (vgl. Abb. 4.12). Anhand der Visualisierung der Wirbelstärke zu einem Zeitpunkt (t_1) ist die Entstehung einer Wirbelstruktur in der ersten Hälfte der Scherschicht zu erkennen. Des Weiteren werden die Wirbel stromabwärts transportiert, wobei die räumliche Ausdehnung zunimmt. An der Rückwand der Kavität ist ein weiterer Wirbel kurz vor dem Aufschlagen zu erkennen.

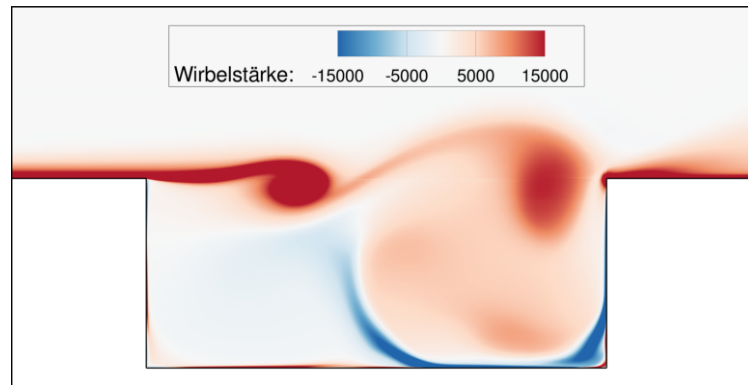


Abb. 4.12.: Visualisierung der Wirbel in der Scherschicht der Kavität mit $L/T = 2,5$ zum Zeitpunkt t_1 .

Aus den auftretenden Wirbeln werden Druckschwankungen erzeugt, die sich einerseits innerhalb der Kavität entgegen der Strömungsrichtung bewegen und andererseits durch die Scherschicht wirken, sodass kreisförmige Druckwellen von der Kavität abgestrahlt werden (vgl. Abb. 4.13).

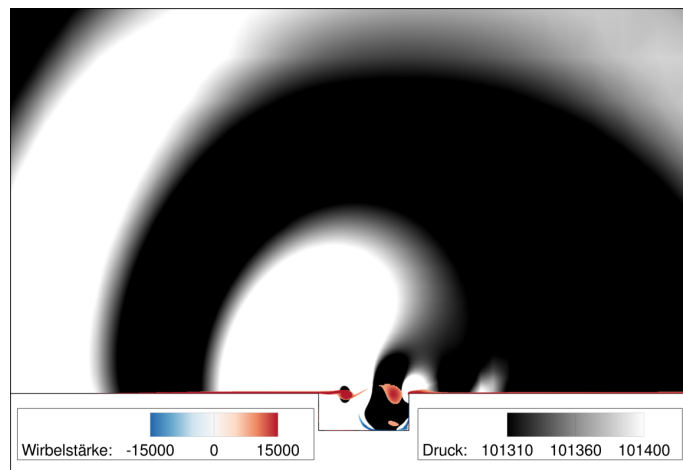


Abb. 4.13.: Visualisierung der Wirbel in der Scherschicht und des Druckfelds bei einer Kavität zum Zeitpunkt t_1 .

Zusätzlich ist dem Druckfeld die Wirbelstärke überlagert. Folglich ist ein Druckminimum kurz vor dem Auftreffen eines Wirbels an der Rückwand zu verzeichnen.

Zu einem späteren Zeitpunkt (t_2) ist dargestellt (siehe Abb. 4.14), wie infolge eines aufgetroffenen Wirbels ein Druckmaximum entsteht. Somit ist die Simulation in der Lage qualitativ die Strömungsphänomene an der Kavität darzustellen.

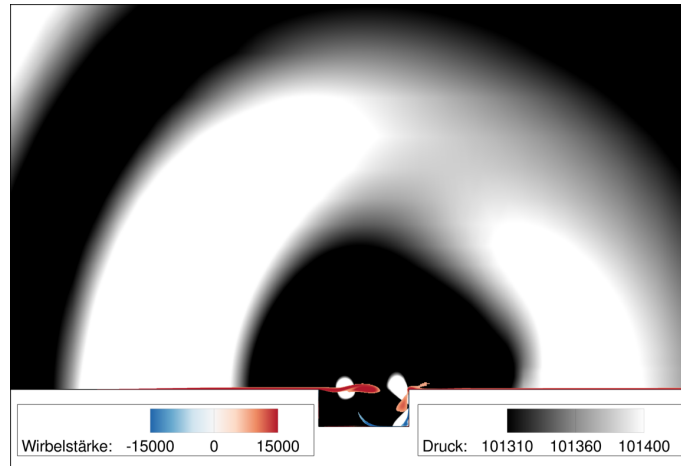


Abb. 4.14.: Visualisierung der Wirbel in der Scherschicht und des Druckfelds bei einer Kavität zum Zeitpunkt t_2 .

Validierung

In Abbildung 4.15 ist der zeitliche Druckverlauf bei $x/L = 0,5$ am Boden der Kavität dargestellt.

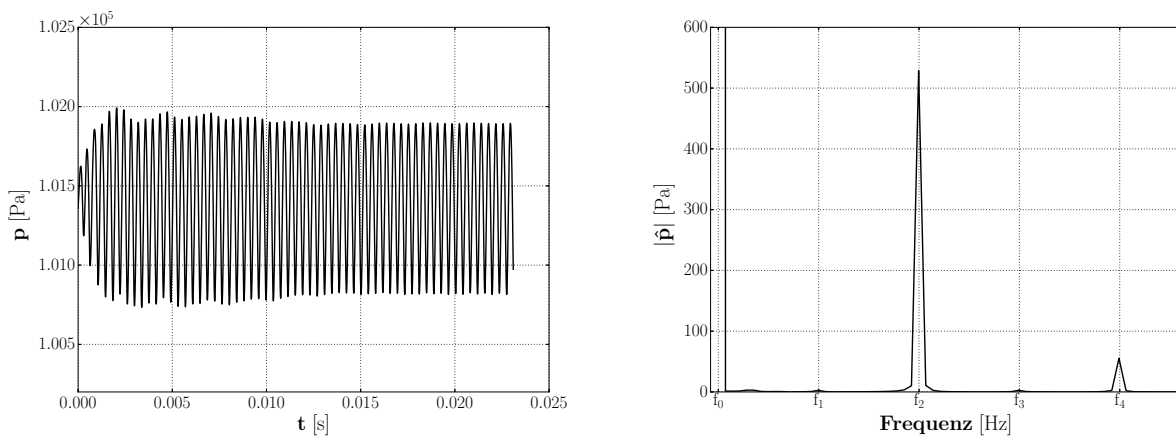


Abb. 4.15.: Zeitlicher Druckverlauf (links) von $x/L = 0,5$ am Boden der Kavität und das Spektrum (rechts).

Aus der spektralen Analyse des Druckverlaufs kann die Strouhal-Zahl der einzelnen Moden berechnet werden. In den Arbeiten von Ahuja und Ashcroft finden sich dazu Referenzdaten, wobei diese bei Ahuja aus Fernfeldmessungen und Ashcroft aus Nahfeldmessungen stammen. Außerdem kann aus der Formel von Rossiter (4.6) mit der Mach-Zahl von 0,26 ein theoretischer Wert angegeben werden.

Zusätzlich dazu enthalten die Simulationsdaten von Ashcroft das Äquivalent des zuvor dargestellten Druckverlaufs am Kavitätenboden, sodass ein Maximalwert für die dimensionslose Druckamplitude ($[\frac{p-\bar{p}}{\kappa\bar{p}}]$) extrahiert werden kann. Dabei kennzeichnet \bar{p} den zeitgemittelten Wert des Drucksignals. Die genannten Größen und die entsprechenden Werte aus dieser Arbeit (TRACE) sind in der Tabelle 4.3 zusammengefasst. Die Berechnung der Werte erfolgt für den eingeschwungenen Zustand des Drucksignal, d.h. $t > 0,015\text{s}$. Zur Entdimensionalisierung der Daten aus dieser Arbeit sei auf die Geometrie und Strömungsbedingungen (siehe Abs. 4.3.1) verwiesen und zusätzlich sei der zeitgemittelte Druck mit $\bar{p} = 101358,5\text{Pa}$ gegeben.

Tab. 4.3.: Strouhal-Zahlen der ersten vier Moden des Druckverlaufs am Kavitätenboden und die dimensionslose Amplitude des Signals.

	Sr_1	Sr_2	Sr_3	Sr_4	$[\frac{p-\bar{p}}{\kappa\bar{p}}]$
Theorie	0,37	0,87	1,37	1,86	—
Ahuja	0,52	1,01	1,52	2,07	—
Ashcroft	—	1,03	—	2,05	0,0019
TRACE	—	0,94	—	1,87	0,0038

Es ergibt sich, dass die Moden von Ahuja und Ashcroft nahezu identisch sind. Wobei im Spektrum von Ashcroft die 1. und 3. Mode nicht auftritt. Im Vergleich dazu liegen Abweichungen bei den Vorhersagen aus der Theorie vor. Aus diesem Grund schlägt Ahuja in seiner Literatur eine Korrektur für eine Modellkonstante vor: $\xi = 0,65$. Analog zu Ashcrofts Simulation tritt bei den Simulationen mit TRACE die 1. und 3. Mode ebenfalls nicht auf. Außerdem unterschätzen die im Rahmen dieser Arbeit berechneten Frequenzen die Vergleichswerte von Ahuja und Ashcroft, wobei im Vergleich zu den genannten wissenschaftlichen Arbeit eine bessere Übereinstimmung mit der Theorie erzielt werden kann. Zusätzlich offenbart der Amplitudenvergleich des Drucksignals eine Diskrepanz von 100% zu Ashcrofts Simulationsergebnis.

4.3.3. Simulationsergebnisse - Harmonic Balance

Analog zum Vorgehen bei der Untersuchung der Zylinderumströmung wird an dieser Stelle zuerst die Frequenzdiskretisierung entsprechend des empirischen Modells durchgeführt. Dabei entspricht das harmonische Set aus dem Modell nicht der üblichen Konvention, dass das Set aus ganzzahligen Vielfachen der ersten Mode besteht (vgl. Tab. 4.3).

Aus den Spektren von Ashcroft, Ahuja und der Abbildung 4.15 geht hervor, dass die Schwingungsphänomene an der Kavität von der zweiten Mode dominiert werden. Deshalb wird das harmonische Set an dieser Mode ausgerichtet. Trotz der entstehenden Abweichungen infolge der ganzzahligen Vielfachen zu den theoretischen Rossiter-Moden der 1., 3. und 4. Harmonischen, werden diese Frequenzen beachtet, da zu hoffen ist, trotzdem die physikalischen Effekte dieser Moden teilweise wiederzugeben.

Die empirische Fundamentalfrequenz erhält man als die Hälfte der 2. Harmonischen, welche mit der Kavitätenlänge $L = 0,0318\text{m}$ und der Anströmgeschwindigkeit $u_\infty = 88,5\text{m/s}$ aus der Strouhal-Zahl von Tabelle 4.3 berechnet werden kann. Folglich kann das harmonische Set mit $f_1 = 1215\text{Hz}$ und $\{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4\}$ angegeben werden.

Der sich einstellende Konvergenzverlauf der einzelnen Harmonischen (vgl. Abb. 4.16) weist ein ähnliches Verhalten wie die Verläufe bei den Simulationen des Zylinders auf (vgl. Abb. 3.10).

Das Residuum der zeitgemittelten Lösung baut sich zu Simulationsbeginn ab, wodurch die höheren Harmonischen angeregt werden. Jedoch folgt nach der Anregungsphase keine kontinuierliche Konvergenz der einzelnen Residuen. Im Anschluss daran weisen die 2. und 4. Harmonische qualitativ Schwingungen um einen nahezu konstanten Mittelwert auf, während der Verlauf der 1. und 3. Harmonischen einen fallenden bzw. steigenden Trend erkennen lässt. Die Schwingungen weisen auf Instabilitäten in den numerischen Verfahren hin, während aus dem Trend gefolgert werden kann, dass die numerische Lösung noch keinen „stabilen Zustand“ gefunden hat.

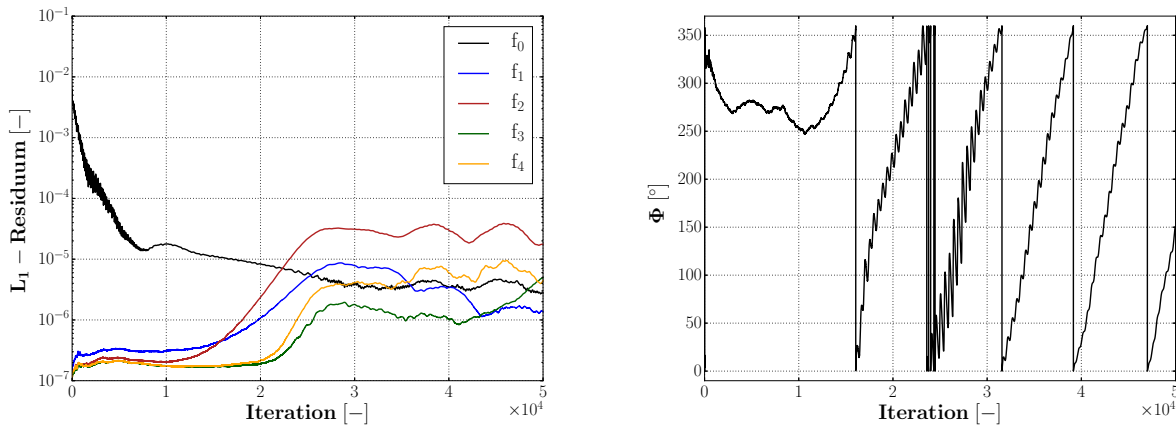


Abb. 4.16.: Empirisches Setup: Residuenverlauf der Harmonischen (links) und Phasenwinkel des Fourier-Koeffizienten der Dichte von der 2. Harmonischen (rechts).

Trotz der Instabilitäten in den numerischen Verfahren weist der Phasenwinkel des Fourier-Koeffizienten der Dichte für die 2. Harmonische (vgl. Abb. 4.16) eine näherungsweise konstante Änderung über die Iterationen auf. Diese Beobachtungen verleiten zur Annahme, dass es sich bei der 2. Harmonischen nicht um die optimale Frequenz handelt. Folglich kann die Frequenzsuche nach Spiker (siehe Abs. 3.3.2.2) angewendet werden. Dafür wird eine weitere Simulation mit einer Verschiebung der zweiten Mode benötigt.

Im Rahmen dieser Arbeit fällt die Wahl hierfür auf die entsprechende Frequenz aus der Zeitbereichssimulation. Folglich ergibt sich das Set mit der Fundamentalfrequenz 1300Hz zu $\{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4\}$.

Der sich einstellende Konvergenzverlauf (siehe Abb. 4.17) zeigt visuell ein ähnliches Verhalten wie der Verlauf bei der empirisch ermittelten 2. Harmonischen (vgl. Abb. 4.16). Allerdings bleibt qualitativ ein fallender bzw. steigender Trend einer Harmonischen aus. Unter Einbeziehung des Phasenwinkels des Fourier-Koeffizienten der Dichte von der 2. Harmonischen (siehe Abb. 4.17), ist im Vergleich zur Simulation mit der empirischen 2. Harmonischen eine geringere Änderungsrate festzustellen. Da beide Änderungen das gleiche Vorzeichen besitzen, kann bereits hieraus geschlossen werden, dass die Frequenz aus dem Zeitbereichsverfahren näher an der optimalen Frequenz liegt als das Äquivalent aus dem empirischen Modell.

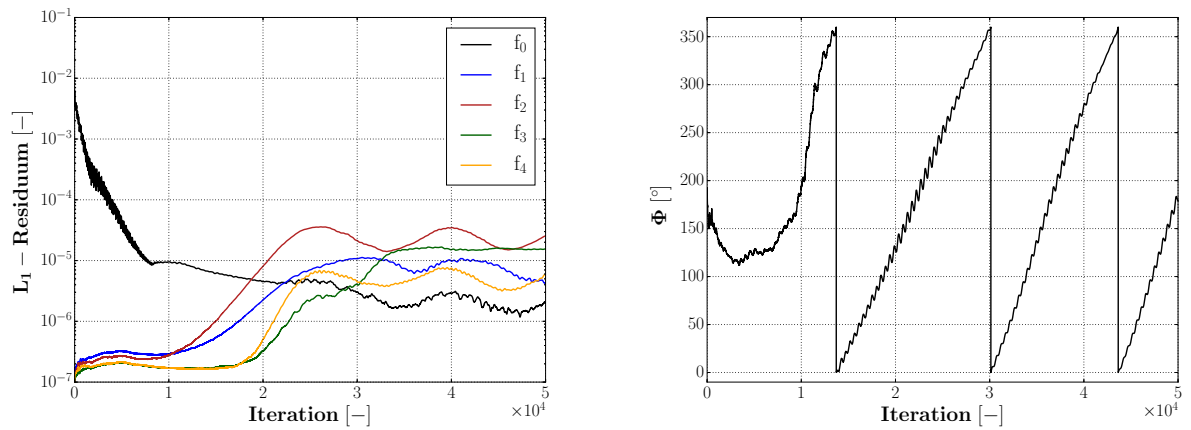


Abb. 4.17.: Setup entsprechend des Zeitbereichsverfahrens: Residuenverlauf der Harmonischen (links) und Phasenwinkel des Fourier-Koeffizienten der Dichte von der 2. Harmonischen (rechts).

Näherungsweise lassen sich die Änderungen des Phasenwinkels über die Iterationen für das empirische Modell und das Zeitbereichsverfahren bestimmen. Mit den jeweiligen Frequenzen der zweiten Harmonischen kann man dann linear eine Frequenz extrapolieren, an der keine Änderung im Phasenwinkel über die Iterationen mehr auftritt (siehe Tab. 4.4).

Tab. 4.4.: Frequenzen der 2. Mode aus der Theorie und dem Zeitbereichsverfahren sowie die Änderungsrate des Phasenwinkels der entsprechenden Harmonic Balance Simulation. Zusätzlich das Ergebnis der linearen Extrapolation nach Spiker.

	f_2 in [Hz]	$\frac{d\Phi}{d\text{Iteration}}$ in $^\circ$
Theorie	2430	0,054
Zeitbereichsverfahren	2600	0,03
Extrapolation	2807	0

Im Folgenden ist der Konvergenzverlauf einer Frequenzbereichssimulation mit einem harmonischen Set, welches an der nach Spiker bestimmten 2. Harmonischen ausgerichtet ist, darstellt (siehe Abb. 4.18). Im Vergleich zu den vorigen Simulationen treten minimale Oszillationen in den Residuen auf. Außerdem wird qualitativ ab ungefähr 50000 Iterationen ein Zustand erreicht, in dem die Residuen näherungsweise konstant sind. Folglich hat man einen robusteren Simulationsverlauf als zuvor, was auf die optimierte 2. Harmonische zurückzuführen ist. Zusätzlich weist der Phasenwinkel des Fourier-Koeffizienten der Dichte von der 2. Harmonischen eine gegen Null strebende Änderungsrate auf. Demzufolge hat das Frequenzsuchverfahren erfolgreich die optimale Frequenz ermittelt.

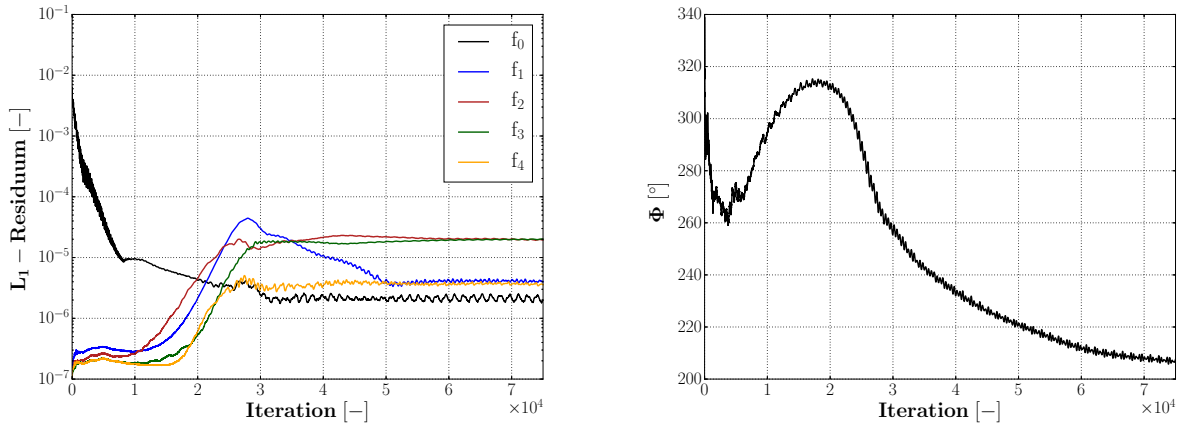


Abb. 4.18.: Optimiertes Setup: Residuenverlauf der Harmonischen (links) und Phasenwinkel des Fourier-Koeffizienten der Dichte von der 2. Harmonischen (rechts).

Validierung

Abschließend bleibt der Vergleich mit den Referenzdaten von Ahuja und Ashcroft. Dafür wird der zeitliche Druckverlauf bei $x/L = 0,5$ am Boden der Kavität benötigt. Da die Bestimmung dieses Verlaufs im Anschluss an Harmonic Balance in POST nicht vorhanden ist, soll hier kurz auf die Berechnung eingegangen werden. Ausgangspunkt hierfür sind die Fourier-Koeffizienten der konservativen Zustände an der entsprechenden Position. Dabei kennzeichnet der Subskript „ k “ die Zugehörigkeit eines Koeffizienten zur k -ten Harmonischen.

$$\underline{\hat{q}}_k = \begin{bmatrix} \hat{q}_1 \\ \hat{q}_2 \\ \hat{q}_3 \\ \hat{q}_4 \\ \hat{q}_5 \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \hat{\rho} \\ \hat{\rho}u \\ \hat{\rho}v \\ \hat{\rho}w \\ \hat{\rho}e_t \end{bmatrix}_k \quad (4.10)$$

Mithilfe einer endlichen komplexen Fourier-Reihe (2.44) werden die Zustände im Zeitbereich zu diskreten Zeitpunkten rekonstruiert. Anschließend wird in Abhängigkeit der konservativen Zustände im Zeitbereich (\underline{q}) und dem Isentropenexponent (κ) der Druck bestimmt.

$$p = (\kappa - 1) \left[q_5 - q_1 \left(\frac{(\frac{q_2}{q_1})^2 + (\frac{q_3}{q_1})^2 + (\frac{q_4}{q_1})^2}{2} \right) \right] \quad (4.11)$$

Der Druckverlauf und das dazugehörige Spektrum sind in Abbildung 4.19 dargestellt. Aus dem Zeitsignal erhält man die maximale dimensionslose Druckamplitude ($[\frac{p-\bar{p}}{\kappa\bar{p}}]$), welche zusätzlich zu den Strouhal-Zahlen der Harmonischen in Tabelle 4.5 aufgeführt ist.

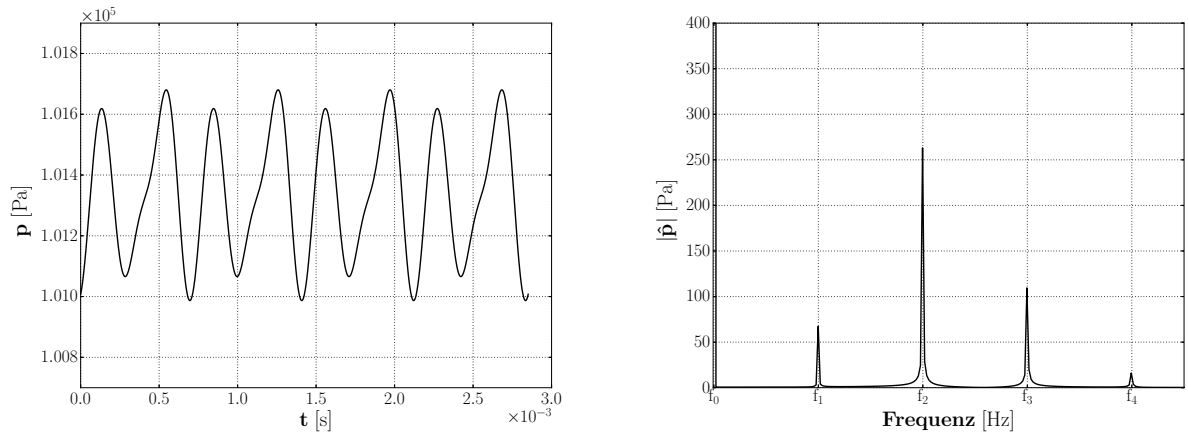


Abb. 4.19.: Optimiertes Setup: Zeitlicher Druckverlauf (links) von der Position $x/L = 0,5$ am Boden der Kavität sowie das Spektrum (rechts) dazu.

Zuerst liefert der Frequenzvergleich, dass die optimierte Frequenz des 2. Mode von TRACE mit Harmonic Balance in besserer Übereinstimmung mit dem entsprechenden Wert von Ahuja und Ashcroft ist als der aus dem Zeitbereichsverfahren berechnete Wert. Für die höheren Moden bleibt dieser Trend erhalten, da die Referenz-Moden aus Experiment und Simulation nahezu ganzzahlige Vielfache der 1. Mode sind. Des Weiteren liegt die Druckamplitude aus dem Frequenzbereichsverfahren näher an dem Wert von Ashcroft, sodass die Diskrepanz aus dem Zeitbereichsverfahren von 100% auf 26,3% reduziert wird.

Die spektrale Analyse des Drucksignals offenbart eine andere Gewichtung der einzelnen Moden im Vergleich zum Zeitbereichsverfahren (vgl. Abb. 4.15 und Abb. 4.19). Die Dominanz der 2. Mode bleibt erhalten, jedoch sind Anteile in der 1. und 3. Mode bei Harmonic Balance zu erkennen, die in den Vergleichsspektren nicht auftreten. Außerdem besitzt die höchste Mode einen reduzierten Fourier-Koeffizienten.

Tab. 4.5.: Strouhal-Zahlen der ersten vier Moden des Druckverlaufs am Kavitätenboden sowie die dimensionslose Amplitude des Signals für die Daten von Ahuja, [1], Ashcroft, [2], der Simulationen im Zeit- und Frequenzbereich.

	Sr_1	Sr_2	Sr_3	Sr_4	$\left[\frac{p-\bar{p}}{\kappa \bar{p}} \right]$
Ahuja	0,52	1,01	1,52	2,07	—
Ashcroft	—	1,03	—	2,05	0,0019
TRACE - Zeit	—	0,94	—	1,87	0,0038
TRACE - HB ³	0,5	1,01	1,51	2,02	0,0024

4.3.4. Diskussion der Simulationsergebnisse

Im Gegensatz zum Testfall der tiefen Kavität (siehe Abs. 4.2) können, basierend auf statistischer Turbulenzmodellierung, die physikalischen Vorgänge im Strömungsfeld erfolgreich mit dem Zeit- und Frequenzbereichsverfahren simuliert werden. Jedoch wird aus dem quantitativen Vergleich für das Zeitbereichsverfahren mit den Referenzdaten von Ahuja und Ashcroft eine Unterschätzung der Frequenzen sowie eine kritische Überschätzung der Druckamplitude von 100% deutlich. Da, wie bereits in Abschnitt 3.3 erwähnt, der Maßstab von Harmonic Balance das Zeitbereichsverfahren ist, ist es umso bemerkenswerter, dass mithilfe der Frequenzsuchstrategie eine nahezu perfekte Übereinstimmung in den Frequenzen und eine Verbesserung der überschätzten Druckamplitude auf 26,3% erzielt werden kann. Dazu sollen im Folgenden mögliche Erklärungen für die Abweichungen und die Überlegenheit des Frequenzbereichsverfahrens gegeben werden.

³Die Entdimensionalisierung kann mithilfe der Geometrie und Strömungsbedingungen (siehe Abs. 4.3.1) durchgeführt werden. Dazu sei zusätzlich die gemittelte Druckamplitude mit $\bar{p} = 101339\text{Pa}$ gegeben.

Analog zur tiefen Kavität treten im betrachteten Testfall Mach-Zahlen in Größenordnung von 10^{-3} innerhalb des Hohlraums auf. Um bei der tiefen Kavität Einflüsse auf den kompressiblen Strömungslöser zu minimieren, sind die Vorgaben für die *CFL*-Zahl und die Anzahl von Löseriterationen restriktiver gewählt, jedoch kann ein Einfluss auf die Güte der Simulation nicht ausgeschlossen werden. Ein Hinweis auf den schadhaften Einfluss der niedrigen Mach-Zahlen ist dadurch gegeben, dass analog zur Problematik von Kociok beim Zylinder (vgl. Abs. 3.2.3) die Frequenzen in der Zeitbereichsrechnung unterschätzt werden. Um dem Problem weiter auf den Grund gehen zu können, sei auf die Möglichkeit der Konditionierung des zu lösenden Gleichungssystems nach Turkel, [39], verwiesen.

Als weiterer Einflussfaktor auf die Druckamplituden können die Abweichungen in den Grenzschichtparametern des Anströmprofils identifiziert werden (vgl. Tab. 4.2). Insbesondere zeigt der erhöhte Formfaktor nach Schlichting, [33], dass die Kavität in dieser Arbeit mit weniger Turbulenz angeströmt wird. Da Ashcroft sich ebenfalls auf Ahujas experimentelle Daten bezieht, kann im Umkehrschluss davon ausgegangen werden, dass in seiner Simulation mehr Turbulenz vorliegt. Folglich kann man aufgrund des dissipativen Charakters von Turbulenz erhöhte Amplituden für das hier vorgestellte numerische Setup erklären.

In diesem Zusammenhang sei allerdings darauf hingewiesen, dass die Referenzdaten ebenfalls fehlerbehaftet sein können, da Ashcroft die Druckamplituden nicht validiert und ebenfalls einen kompressiblen Strömungslöser (CFL3D⁴ der NASA⁵) ohne Konditionierung des Gleichungssystems nutzt.

Eingangs in diesem Abschnitt wird bereits herausgestellt, dass die Lösungsqualität der Simulation mit Harmonic Balance höher ist. Die Verbesserung kann dadurch erklärt werden, dass durch die Suchstrategie von Spiker die korrekte physikalische Frequenz ermittelt wird. Im Anschluss daran wertet Harmonic Balance basierend auf der richtigen Frequenz die Druckamplituden dazu aus. Da mit dem Zeitbereichsverfahren bereits eine Unsicherheit in den Frequenzen vorliegt, ist folglich der Amplitudenfehler ebenfalls größer.

Abschließend bleibt zu resümieren, dass die Simulationen der flachen Kavität erfolgreich die Anwendung von Harmonic Balance und der Frequenzsuchstrategie darlegen. Da in erster Linie Ziel der Untersuchung die Prüfung einer prinzipiellen Anwendung des Frequenzbereichsverfahren ist, sei lediglich am Rande erwähnt, dass der Rechenaufwand um 265,5% oberhalb des Zeitbereichsverfahren liegt.

Speziell die Ungenauigkeiten der Zeitbereichssimulation verlangen nach weiterführenden Behandlungen des Testfalls um abschließende Aussagen bezüglich der Güte von Zeit- und Frequenzbereichsverfahren treffen zu können. Dafür sind weitere Daten für die Validierung notwendig, eine Überarbeitung des numerischen Setups und die Anwendung eines vorkonditionierten Gleichungssystems ist ratsam.

⁴Computational Fluid Dynamics Laboratory Three Dimensional

⁵National Aeronautics and Space Administration

5. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde die Anwendbarkeit von Harmonic Balance für periodisch schwingende Strömungsphänomene untersucht, bei denen die Fundamentalfrequenz der Schwingung unbekannt ist. Im Zuge dessen wurde erweiternd zum akademischen Fall eines Zylinders, welcher bereits in der Literatur erfolgreich mit dem Frequenzbereichsverfahren untersucht wurde, die Eignung von Kavitäten als neue Testfälle für das Verfahren bei unbekannten Frequenzen geprüft.

Dazu wurde zu Beginn für den laminar umströmten Zylinder das empirische Modell nach Fey, [10], genutzt, um eine Vorhersage für die Fundamentalfrequenz zu erhalten. Dabei konnte die sich ausbildende Wirbelstraße qualitativ dargestellt werden. Des Weiteren wurden Abweichungen im Auftriebsbeiwert des Zylinders von 1,7% festgestellt bei einer Genauigkeit der Frequenzvorhersage von 1,9% im Vergleich mit einem Zeitbereichsverfahren. Der Rechenaufwand gegenüber der Zeitbereichsmethode liegt dabei bei 57,2%.

Aufgrund der Tatsache, dass für viele Anwendungen eine höhere Genauigkeit benötigt wird und vor allem, weil das genannte Vorgehen von der Güte des empirischen Modells abhängt und damit fallspezifisch ist, wird die Frequenzsuchstrategie nach Spiker, [36], angewendet. Damit ist es möglich für den laminar umströmten Zylinder die Ablösefrequenz der Simulation im Zeitbereich bis auf 0,4% vorherzusagen und gleichzeitig die Abweichung im Auftriebsbeiwert auf 0,8% zu reduzieren. Für diese Strategie sind jedoch mindestens drei Simulationen mit Harmonic Balance notwendig, wodurch der Vorteil der Effizienzsteigerung verloren geht. Dazu sei allerdings vermerkt, dass die Strategie trotzdem ihre Legitimation behält, da für Anwendungsfälle, wie z.B. Turbomaschinen durch die Ausnutzung der räumlichen Periodizität höhere Effizienzsteigerungen zu erwarten sind.

Um die Grenzen für die Anwendbarkeit der Frequenzsuchstrategie aufzuzeigen, wurden im Folgenden künstliche Unsicherheiten in der Fundamentalfrequenz von Harmonic Balance bei einer Beachtung von drei höheren Harmonischen eingebracht. Daraus kann eine optimale Verwendung für einen Abweichungsbereich von $\pm 25\%$ zur physikalischen Frequenz angegeben werden. Zusätzlich funktioniert die Strategie für Unterschätzungen von 40% bis 60%, wobei es zu einer schwach fehlerbehafteten Vorhersage der Frequenz kommt. Im Gegensatz dazu schlägt die Suche für eine Überschätzung von über 25% fehl. Aus den Ergebnissen wird vermutet, dass das Verfahren erfolgreich ist, solange eine Frequenz der betrachteten Harmonischen im Bereich von $\pm 25\%$ zur physikalischen Frequenz liegt. Dazu könnten nachfolgenden Arbeiten weitere Unsicherheiten betrachten, um die Hypothese zu prüfen.

Bei der Simulation der selbst-erregten Schwingungen der gewählten Kavitäten handelt es sich um weitaus komplexere Testfälle, da Turbulenz der treibende Faktor hinter dem Rückkopplungsprozess bzw. der Anregung ist. Daraus erwächst die Schwierigkeit die Physik korrekt abzubilden, da die Anwendung von Harmonic Balance ausschließlich in Kombination mit statistischer Turbulenzmo-

dellierung sinnvoll ist.

Aus dieser Problematik heraus begründet sich der Fehlschlag der Simulation einer tiefen Kavität ($L/T = 0,5$), da zu vermuten ist, dass eine breitbandige und kleinskalige Anregung vorliegt, die nicht dargestellt werden kann. Darüber hinaus liegt in dem Testfall nach Ahuja, [1], eine besonders stark dämpfende Wirkung infolge der Grenzschichtdicke vor, was in Kombination mit einer fehlerhaft modellierten künstlichen Viskosität die Entwicklung makroskopischer Änderungen in der Scherschicht hemmt. Somit können initiale Störungen nicht aufrechterhalten werden, sodass sich ein stationäres Strömungsfeld einstellt.

Mit den Erkenntnissen aus dem Fehlschlag fällt die Wahl eines weiteren Testfalls auf eine flache Kavität ($L/T = 2,5$) mit einer im Vergleich zur tiefen Kavität um den Faktor 10 geringeren Grenzschichtdicke der Anströmung.

Dabei ist die Simulation im Zeit- und Frequenzbereichsverfahren erfolgreich, d.h. qualitativ kann der Rückkopplungsprozess korrekt dargestellt werden. Jedoch offenbart die Validierung eines Drucksignals am Kavitätenboden für das Zeitbereichsverfahren eine Unterschätzung der Frequenzen und darüber hinaus eine Abweichung in der Amplitude von 100%.

Für Harmonic Balance wurde analog zum Vorgehen beim Zylinder eine empirische Vorhersage mit dem Modell nach Rossiter, [32], für die Fundamentalfrequenz generiert. Im Anschluss daran wird unter Hinzunahme einer weiteren Simulation mit einer dazu verschobenen Frequenz die Frequenzsuchstrategie erfolgreich angewendet, d.h. die ermittelte Fundamentalfrequenz ist nahezu in perfekter Übereinstimmung mit der physikalischen Frequenz. Zusätzlich gelingt es mit Harmonic Balance durch die Aufprägung der korrekten Fundamentalfrequenz eine weitaus bessere Vorhersage der Druckamplitude von 26,3% im Vergleich zu den Referenzdaten als beim Zeitbereichsverfahren zu erreichen.

Für die Ungenauigkeiten bei Zeit- und Frequenzbereichsverfahren werden hauptsächlich die schlecht konditionierten Gleichungssysteme des kompressiblen Strömungslösers im Kontext von niedrigen Strömungsgeschwindigkeiten verantwortlich gemacht. Zusätzlich dazu weist die simulierte Grenzschicht der Anströmung zu wenig Turbulenz auf, was eine Erklärung für die überschätzten Druckamplituden ist. Um abschließende Aussagen bezüglich der Lösungsqualität treffen zu können, werden jedoch zusätzliche Referenzdaten zu den Druckamplituden benötigt, da die numerischen Vergleichsdaten nicht validiert sind.

Abschließend kann festgehalten werden, dass das übergeordnete Ziel, die prinzipielle Eignung von Harmonic Balance für Schwingungsphänomene mit unbekannter Fundamentalfrequenz, nachgewiesen wurde. Dafür stellt sich die Frequenzsuchstrategie nach Spiker für den Zylinder als auch für die Kavität als zielführend heraus, um die physikalische Frequenz zu ermitteln. Zusätzlich zur Umströmung des Zylinders kann trotz Diskrepanzen Harmonic Balance erfolgreich zur Darstellung der selbst-erregten Schwingungen der flachen Kavität genutzt werden. In diesem Kontext kann es die Aufgabe weiterführender Arbeiten sein, die Probleme in der Lösungsqualität zu untersuchen. Dafür kann der Trend einer höheren Güte der Ergebnisse des Frequenzbereichsverfahrens im Vergleich zur Simulation im Zeitbereich als Motivation dienen.

Literaturverzeichnis

- [1] K. Ahuja and J. Mendoza. Effects of cavity dimensions, boundary layer, and temperature on cavity noise with emphasis on benchmark data to validate computational aeroacoustic codes. Technical report, National Aeronautics and Space Administration, 1995.
- [2] G. Ashcroft. *A Computational and Experimental Investigation Into the Aeroacoustic of Low speed flows*. PhD thesis, University of Southampton, 2003.
- [3] G. Ashcroft. Persönliche Kommunikation. 2019.
- [4] K. Becker and E. Kuegeler. Recent progress in a hybrid-grid CFD solver for turbomachinery flows. In *ECCOMAS*, 2010.
- [5] J. Blazek. *Computational Fluid Dynamics*. Butterworth Heinemann, 2015.
- [6] D. Canuto and K. Taira. Two-dimensional compressible viscous flow around a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 2015.
- [7] D. A. Anderson, J. C. Tannehill. *Computational Fluid Mechanics And Heat Transfer*. Taylor & Francis, 1997.
- [8] A. T. de Jong and H. Bijl. Experimental and numerical investigation of the flow-induced resonance of slender deep cavities that resemble automotive door gaps. *AIAA Journal*, 2010.
- [9] J. Ferziger and M. Peric. *Numerische Strömungsmechanik*. Springer Verlag, 2008.
- [10] U. Fey, M. König, and H. Eckelmann. A new strouhal-reynolds-number relationship for the circular cylinder in the range of $47 < \text{Re} < 2 \cdot 10^5$. *American Institute of Physics*, 1998.
- [11] C. Frey, G. Ashcroft, H.-P. Kersken, and C. Voigt. A harmonic balance technique for multistage turbomachinery applications. *ASME Turbo Expo*, 2014.
- [12] J. E. Fromm. A method for reducing dispersion in convective difference schemes. *Journal of Computational Physics*, 1968.
- [13] X. Gloerfelt. Cavity noise. Technical report, Ecole Nationale Supérieure d’Arts de Métiers, 2007.
- [14] K. Hall, K. Ekici, J. Thomas, and E. Dowell. Harmonic balance methods applied to computational fluid dynamics problems. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 2013.

- [15] K. C. Hall, J. Thomas, and W. Clark. Computation of unsteady nonlinear flow in cascades using a harmonic balance technique. *AIAA Journal*, 2002.
- [16] F. J. Harris. On the use of windows for harmonic analysis with the discret fourier transform. *IEEE Sensors Journal*, 1978.
- [17] H. Heller, G. Holmes, and E. Covert. Flow-induced pressure oscialltions in shallow cavities. Technical report, Air Force Flight Dynamic Laboratory, 1970.
- [18] W.-H. Hucho. *Aerodynamik der stumpfen Körper*. Springer Verlag, 2011.
- [19] G. Karnidakis. Frequency selection and asymptotic states in laminar wakes. *Journal of Fluid Mechanics*, 1988.
- [20] B. Kistner. *Modellierung und numerische Simulation der Nachlaufstruktur von Turbomaschinen am Beispiel einer Axialstufe*. PhD thesis, Technische Universität Darmstadt, 1999.
- [21] V. Kociok. Numerische Vorhersage nicht synchroner Schwingungsphänomene in Turbomaschinen. Master’s thesis, RWTH Aachen, 2017.
- [22] T. Kuhn, J. Duerrwaechter, and C.-D. Munz. Zonal LES for aeroacoustic cavity feedback noise. *AIAA Conference*, In Bearbeitung.
- [23] M. McMullen. Demonstration of nonlinear frequency domain methods. *AIAA Journal*, 2006.
- [24] F. R. Menter. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA Journal*, 1994.
- [25] A. Neubauer. *DFT - Diskrete Fourier-Transformation*. Springer Verlag, 2012.
- [26] C. Norberg. Flow around a circular cylinder: Aspects of fluctuating lift. *Journal of Fluid and Structures*, 2000.
- [27] S. A. Orzag. Elimination of aliasing in finite-difference sscheme by filtering high-wavenumber components. *Jounral of Atmospheric Science*, 1971.
- [28] S. B. Pope. *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, 2007.
- [29] O. Reynolds. An experimental investigation of the circumstances which determine wheter the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1883.
- [30] D. Rockwell and E. Naudascher. Self-sustained oscialltions of impinging free shear layers. *Annual review of fluid mechanics. Volume 11*, 1979.
- [31] A. Roshko. On the drag and shedding frequency of two-dimensional bluff bodies. *NACA Report*, 1954.
- [32] J. Rossiter. Wind-tunnel experiments on the flow over rectangular cavities at subsonic and transonic speeds. Technical report, Cranfield University, 1964.

- [33] H. Schlichting. *Boundary-Layer Theory*. McGraw-Hill, 1979.
- [34] H. Sockel. *Aerodynamik der Bauwerke*. Vieweg & Teubner Verlag, 1984.
- [35] D. B. Spalding. A single formula for the "law of the wall". *journal of Applied Mechanics*, 1961.
- [36] M. A. Spiker, J. P. Thomas, R. E. Kielb, and E. H. Dowell. Modeling cylinder flow vortex shedding with enforced motion using a harmonic balance approach. *AIAA Journal*, 2006.
- [37] W. Sutherland. The viscosity of gases and molecular force. *Philosophical Magazine*, 1893.
- [38] M. Tracy and E. Plentovich. Cavity unsteady-pressure measurements at subsonic and transonic speeds. Technical report, NASA, 1997.
- [39] E. Turkel. Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations. *Journal of Computational Physics*, 1987.
- [40] B. v. Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme. *Journal of Computational Physics*, 1979.
- [41] H. K. Versteeg and W. Malalasekera. *An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method*. Pearson Education Ltd., 2007.
- [42] C. Viozat. *Implicit Upwind Scheme for Low Mach Number Compressible Flows*. PhD thesis, INRIA, 1997.
- [43] B. Weigang, J. Köhler, and J. Wolfersdorf. *Thermodynamik kompakt*. Springer Verlag, 2013.
- [44] D. C. Wilcox. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *AIAA Journal*, 1988.
- [45] C. H. K. Williamson. Defining a universal and continuous strouhal-reynolds number relationship for the laminar vortex shedding of a circular cylinder. *The Physics of Fluids*, 1988.
- [46] C. H. K. Williamson. Vortex dynamics in the cylinder wake. *Journal of Fluid Mechanics*, 1996.
- [47] M. M. Zdravkovich. *Flow around circular cylinders, Volume 1: Fundamentals*. Oxford University Press, 1997.

A. Anhang

A. Navier-Stokes Gleichungen - Skalare Formulierung

In diesem Abschnitt wird die Bewegung eines kompressiblen und reibungsbehafteten Fluids, ausgehend von der skalaren Form von Massen-, Impuls- und Energieerhaltung, beschrieben.

Betrachtungsweise

Vorab soll zunächst auf zwei unterschiedliche Beobachtungsperspektiven für ein Fluidpartikel eingegangen werden. Bei der ersten nach Lagrange ist der Beobachter an die Masse eines Partikels gebunden, folglich ändert sich die Position des Beobachters in einer bewegten Strömung mit der Zeit, was für die Berechnung beachtet werden muss. Zusätzlich kann sich die geometrische Form des Partikels ändern.

Im Vergleich dazu ist ein Beobachter nach Euler ortsfest. Dadurch ist es möglich, Rechengebiete aus im Raum fixierten Kontrollvolumen bzw. Zellen zu erstellen. Infolge der unbeweglichen Kontrollvolumen tritt Masse über ihre Ränder, was man als konvektiven Fluss bezeichnet. In den Erhaltungsgleichungen muss deshalb ein konvektiver Transport von Masse, Impuls und Energie berücksichtigt werden.

In der numerischen Strömungsmechanik hat sich die Betrachtungsweise nach Euler durchgesetzt. Deshalb werden im weiteren Verlauf dieses Abschnittes die Erhaltungsgleichungen anhand eines ortsfesten Kontrollvolumens (siehe Abb. A.1) besprochen. Die Ausführungen orientieren sich dabei an der Arbeit von Versteeg, [41].

Massenerhaltung

Die Massenerhaltung muss für jedes Kontrollvolumen erfüllt sein. Infolge der gewählten Betrachtungsweise wird ein Massenaustausch über die Ränder dieses Volumens zugelassen. Deshalb muss die Zunahme der Masse dem nach innen gerichteten Massenstrom entsprechen.

In Abbildung A.1 sind die entsprechenden Flüsse eingetragen. Wendet man die Massenerhaltung auf das abgebildete Kontrollvolumen mit den Seitenlängen: dx , dy und dz an, erhält man:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz = \left[\rho u - \left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx \right) \right] dy dz + \left[\rho v - \left(\rho v + \frac{\partial \rho v}{\partial y} dy \right) \right] dx dz + \left[\rho w - \left(\rho w + \frac{\partial \rho w}{\partial z} dz \right) \right] dx dy. \quad (\text{A.1})$$

Vereinfacht man die Gleichung und kürzt das konstante Zellvolumen, ergibt sich die Massenerhaltung in der eulerschen Betrachtungsweise.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.2})$$

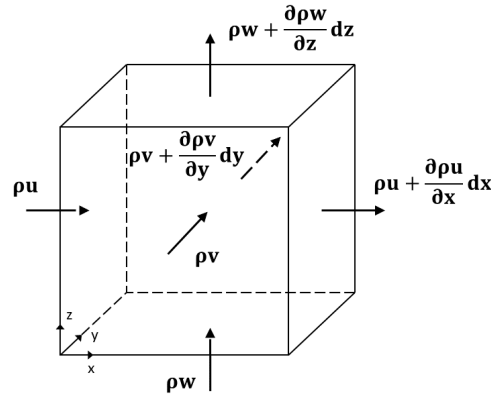


Abb. A.1.: Ein- und austretende Massenströme an einem Kontrollvolumen.

Als Folge der eulerschen Betrachtungsweise bzw. des konstanten Volumens betrachtet man anstelle der Massenerhaltung eine volumenspezifische Massen- bzw. Dichterhaltung, d.h. die konservative Variable ist: ρ . Analog dazu wird im Folgenden ebenfalls eine volumenspezifische Impuls- und Energieerhaltung besprochen.

Wie anhand der Massenerhaltung gezeigt, setzt sich für die gewählte Betrachtungsweise die Änderung der Erhaltungsgröße aus einem zeitlichen und einem konvektiven Anteil zusammen. Mithilfe des totalen Differenzials lässt sich diese Änderung zusammenfassen zu:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0. \quad (\text{A.3})$$

Eine alternative Darstellung der Massenerhaltung erhält man durch die Einführung des Geschwindigkeitsvektors (\underline{u}).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0 \quad (\text{A.4})$$

Impulserhaltung

Aus dem zweiten Newtonschen Gesetz ergibt sich, dass die Änderung des Impulses eines Fluidpartikels identisch zu der Summe aller Kräfte ist, welche auf selbiges wirken. Dabei lassen sich die Kräfte in zwei Klassen einteilen: Oberflächen- und Volumenkräfte.

- Oberflächenkräfte (F_S)
 - Reibungskraft
 - Druckkraft

- Volumenkräfte (F_V)
 - Gravitationskraft
 - Corioliskraft
 - Zentrifugalkraft

Somit erhält man mit dem volumenspezifischen Impuls die Erhaltungsgleichung als:

$$\frac{D\rho u}{Dt} \stackrel{!}{=} \sum \frac{F_S}{V} + \sum \frac{F_V}{V}. \quad (\text{A.5})$$

Der Impuls ist eine richtungsabhängige Größe und besitzt daher Anteile in jede Raumrichtung. Folglich kann der Impuls getrennt für jede Raumrichtung betrachtet werden.

Aus der Abbildung A.2 lassen sich die an den einzelnen Oberflächen des Kontrollvolumens angreifenden Kräfte in x -Richtung ablesen. Die Summe der Oberflächenkräfte in x -Richtung ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} \sum F_{S,x} = & \left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) - \tau_{xx} + \tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx \right] dydz \\ & + \left[-\tau_{yx} + \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right] dx dz \\ & + \left[-\tau_{zx} + \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right] dx dy. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

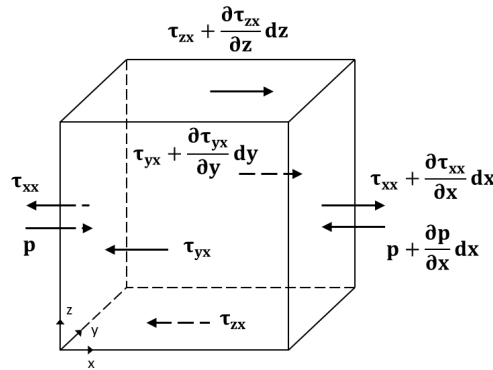


Abb. A.2.: Kontrollvolumen mit angreifenden Oberflächenkräften in x -Richtung.

Nach Elimination der Schubspannungen und Drücke ohne Differential und dem Dividieren durch das Volumen $V = dxdydz$, erhält man einen Ausdruck für die Oberflächenkräfte in x -Richtung. Führt man zusätzlich $S_{M,x}$ für die Summe der Volumenkräfte in x -Richtung ein, erhält man die Summe der äußeren Kräfte der Impulserhaltung für die x -Komponente zu:

$$\sum \frac{F_{S,x}}{V} + \sum \frac{F_{V,x}}{V} = \frac{\partial(-p + \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + S_{M,x}. \quad (\text{A.7})$$

Das beschriebene Vorgehen wiederholt man für die y - und z -Richtung und erhält die folgenden Gleichungen für die äußeren Kräfte.

$$\begin{aligned} \sum \frac{F_{S,y}}{V} + \sum \frac{F_{V,y}}{V} &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial(-p + \tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + S_{M,y} \\ \sum \frac{F_{S,z}}{V} + \sum \frac{F_{V,z}}{V} &= \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial(-p + \tau_{zz})}{\partial z} + S_{M,z} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Im letzten Schritt setzt man die Zusammenhänge für die Summe der einzelnen Komponenten der äußeren Kräfte (A.7 und A.8) in die Impulserhaltung (A.5) ein. Löst man zusätzlich das totale Differenzial auf, erhält man die Impulserhaltung in Tensordarstellung.

$$\underbrace{\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} \rho u u & \rho u v & \rho u w \\ \rho u v & \rho v v & \rho v w \\ \rho u w & \rho v w & \rho w w \end{bmatrix}}_{\text{Impulsaenderung}} = \underbrace{\nabla \cdot \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{bmatrix}}_{\text{Oberflaechenkraefte}} - \nabla p + \underbrace{\underline{S}_M}_{\text{Volumenkraefte}} \quad (\text{A.9})$$

Energieerhaltung

Nach Weigand, [43], ist für den ersten Hauptsatz der Thermodynamik für ein offenes System die Änderung der Gesamtenergie (E_t) innerhalb des Kontrollvolumens gleichzusetzen mit den Netto-Energieflüssen über die Grenzen des Kontrollvolumens. Die Flüsse teilen sich in pro Zeiteinheit geleistete Arbeit (\dot{W}) und Wärmefluss (\dot{H}) auf. Für die eulersche Betrachtungsweise erhält man folglich die Energieerhaltung zu:

$$\frac{D\rho e_t}{Dt} \stackrel{!}{=} \frac{\dot{H}}{V} + \frac{\dot{W}}{V}. \quad (\text{A.10})$$

Anhand der in Abbildung A.3 eingezeichneten volumenspezifischen Wärmefflüsse für die einzelnen Raumrichtungen ($\dot{h}_x, \dot{h}_y, \dot{h}_z$) lässt sich der gesamte Wärmeffluss (\dot{H}) als Summe der Einzelflüsse darstellen.

$$\dot{H} = \left[\dot{h}_x - \left(\dot{h}_x + \frac{\partial \dot{h}_x}{\partial x} dx \right) \right] dydz + \left[\dot{h}_y - \left(\dot{h}_y + \frac{\partial \dot{h}_y}{\partial y} dy \right) \right] dx dz + \left[\dot{h}_z - \left(\dot{h}_z + \frac{\partial \dot{h}_z}{\partial z} dz \right) \right] dx dy \quad (\text{A.11})$$

Durch Elimination der Einzelflüsse ohne Differenzial und Kürzen des Volumens erhält man:

$$\frac{\dot{H}}{V} = -\frac{\partial \dot{h}_x}{\partial x} - \frac{\partial \dot{h}_y}{\partial y} - \frac{\partial \dot{h}_z}{\partial z}. \quad (\text{A.12})$$

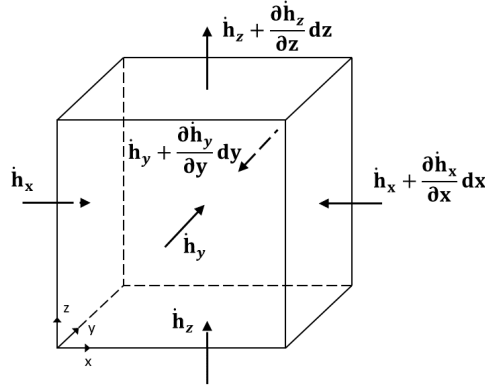


Abb. A.3.: Wärmeflüsse für die Flächenelemente des Kontrollvolumens.

Die geleistete Arbeitsrate am Kontrollvolumen teilt sich entsprechend ihrer Ursache in eine Summe aus Oberflächenkräften und Volumenkräften auf. Dabei erhält man die pro Zeiteinheit geleistete Arbeit als das Produkt der gleichgerichteten Komponenten aus Kraft und Geschwindigkeit.

$$\dot{W} = \dot{W}_S + \dot{W}_V = uF_{S,x} + vF_{S,y} + wF_{S,z} + \underbrace{uF_{V,x} + vF_{V,y} + wF_{V,z}}_{=S_E} \quad (\text{A.13})$$

Analog zur Impulserhaltung wird die Energie aus den Volumenkräften als Quellterm (S_E) definiert. Des Weiteren lässt sich anhand der am Kontrollvolumen eingezeichneten volumenspezifischen Oberflächenkräfte (vgl. Abb. A.2) der Anteil der aus der x -Richtung resultierenden Arbeitsrate bestimmen.

$$uF_{S,x} = \left[\frac{\partial(u(-p + \tau_{xx}))}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (\text{A.14})$$

Auf gleiche Art und Weise erhält man ebenfalls den Anteil an der gesamten Arbeitsrate aus den Kräften in y - und z -Richtung.

$$\begin{aligned} vF_{S,y} &= \left[\frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v(-p + \tau_{yy}))}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} \right] dx dy dz \\ wF_{S,z} &= \left[\frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w(-p + \tau_{zz}))}{\partial z} \right] dx dy dz \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Anschließend setzt man die Zusammenhänge (A.14 und A.15) in die Definition der gesamten Arbeitsrate (A.13) ein. Danach nimmt man den neu erhaltenen Zusammenhang, sowie die Gleichung für den Wärmefluss (A.12) und setzt beides in den ersten Hauptsatz der Thermodynamik (A.10) ein. Außerdem löst man ebenfalls das totale Differenzial der spezifischen Totalenergie auf.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho e_t}{\partial t} + \frac{\partial \rho u e_t}{\partial x} + \frac{\partial \rho v e_t}{\partial y} + \frac{\partial \rho w e_t}{\partial z} = -\frac{\partial \dot{h}_x}{\partial x} - \frac{\partial \dot{h}_y}{\partial y} - \frac{\partial \dot{h}_z}{\partial z} \\
& + \frac{\partial(u(-p + \tau_{xx}))}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v(-p + \tau_{yy}))}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} \\
& + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w(-p + \tau_{zz}))}{\partial z} + S_E
\end{aligned} \tag{A.16}$$

Fasst man die Gleichung (A.16) mit Vektoren zusammen, erhält man schließlich eine kompakte Formulierung für die Energieerhaltung.

$$\underbrace{\frac{\partial \rho e_t}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_t \underline{u})}_{\text{Energieänderung}} = \underbrace{-\nabla \cdot \dot{\underline{h}}}_{=\dot{Q}/V} + \underbrace{\nabla \cdot \left(\underline{u} \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \right)}_{=\dot{W}_S/V} - \nabla \cdot (\underline{u} p) + \underbrace{S_E}_{=\dot{W}_V/V} \tag{A.17}$$

B. Zustandsvektor, Flussvektor, Flussmatrix und Quellterm der Navier-Stokes Gleichungen

Flussvektor

$$\underline{F}(\underline{q}) = \underbrace{\underline{F}(\underline{q})_x^c + \underline{F}(\underline{q})_y^c + \underline{F}(\underline{q})_z^c}_{\text{konvektiver Anteil}} - \underbrace{\underline{F}(\underline{q})_x^v - \underline{F}(\underline{q})_y^v - \underline{F}(\underline{q})_z^v}_{\text{viskoser Anteil}} \tag{A.18}$$

Konvektive Flussvektoren

$$\underline{F}(\underline{q})_x^c = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho u(e_t + p) \end{bmatrix}, \quad \underline{F}(\underline{q})_y^c = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho v(e_t + p) \end{bmatrix}, \quad \underline{F}(\underline{q})_z^c = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ \rho w(e_t + p) \end{bmatrix} \tag{A.19}$$

Viskose Flussvektoren

$$\begin{aligned}
 \underline{F}(\underline{q})_x^v &= \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{yx} \\ \tau_{zx} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} - \dot{h}_x \end{bmatrix} \\
 \underline{F}(\underline{q})_y^v &= \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} - \dot{h}_y \end{bmatrix} \\
 \underline{F}(\underline{q})_z^v &= \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \\ u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz} - \dot{h}_z \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

Konvektive und viskose Flussmatrix

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{F}}(\underline{q})^v &= [\underline{F}(\underline{q})_x^v, \underline{F}(\underline{q})_y^v, \underline{F}(\underline{q})_z^v] \\
 \underline{\underline{F}}(\underline{q})^c &= [\underline{F}(\underline{q})_x^c, \underline{F}(\underline{q})_y^c, \underline{F}(\underline{q})_z^c]
 \end{aligned} \tag{A.21}$$

Quellterm

Exemplarisch wird an dieser Stelle eine beliebige spezifische Volumenkraft in Form einer Beschleunigung: $\underline{a} = [a_x, a_y, a_z]^T$ in den Quellterm eingesetzt.

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho a_x \\ \rho a_y \\ \rho a_z \\ \rho(\underline{a} \cdot \underline{u}) \end{bmatrix} \tag{A.22}$$

C. Nichtlinearität des Residuums bei Harmonic Balance - Burgers Gleichung

Um ein mögliches Vorgehen bei Harmonic Balance zu demonstrieren und den Effekt der Nichtlinearität aufzuzeigen, soll das Verfahren hier anhand der Burgersgleichung (A.23) durchgeführt werden. Die Gleichung besitzt denselben mathematischen Charakter wie die reibungsfreien Navier-Stokes Gleichungen bzw. Eulergleichungen.

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(qq)}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.23})$$

Zu Beginn stellt man die Größe (q) mit einer komplexen Fourierreihe dar. Hierbei sei $\hat{q}(x)_k$ der Fourier-Koeffizient der k -ten Harmonischen zur Fundamentalfrequenz (ω).

$$q(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{q}(x)_k e^{jk\omega t} \quad (\text{A.24})$$

Nach Einsetzen in die Burgersgleichung (A.23) und Auflösen der Zeitableitung ergibt sich:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} jk\omega t \hat{q}(x)_k e^{jk\omega t} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{q}(x)_k e^{jk\omega t} \right) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{q}(x)_k e^{jk\omega t} \right) \right]}_{R(\hat{q}(x,t))} = 0. \quad (\text{A.25})$$

Exemplarisch sollen im Weiteren anstelle von ∞ eine endliche Anzahl von $K = 2$ Harmonischen betrachtet werden. Multipliziert man das Residuum ($R(\hat{q}(x, t))$) aus und sortiert die Terme entsprechend ihrer Harmonischen, dann lässt sich die Burgersgleichung mithilfe von den Faktoren: $C(\hat{q})_k$ als Reihe formulieren.

$$\sum_{k=-4}^4 C(\hat{q})_k e^{-jk\omega t} = 0 \quad (\text{A.26})$$

Es sei darauf hingewiesen, dass infolge der quadratischen Kopplung Terme mit Harmonischen entstehen, welche außerhalb der zuvor definierten Auswahl von $K = 2$ liegen.

Bei den Exponentialfunktionen der Harmonischen handelt es sich um Orthogonalbasen, deshalb muss nicht nur die gesamte Reihe (A.26) zu Null werden, sondern zusätzlich jeder Faktor: $C(\hat{q})_k$. Des Weiteren ist es ausreichend, die Reihe lediglich für positive Frequenzen auszuwerten, wenn man sich auf $q \in \mathbb{R}$ festlegt. Der Grund dafür ist, dass, wenn q reell ist, dann muss ebenfalls die gesamte Reihe reellwertig sein und folglich entspricht der Fourier-Koeffizient einer negativen Frequenz, dem komplex konjugierten Fourier-Koeffizient der entsprechenden positiven Frequenz (\hat{q}_k^*).

$$\hat{q}_{-k} = \hat{q}_k^* \quad (\text{A.27})$$

Aus dieser Betrachtung ergibt sich schließlich ein nichtlineares System von Gleichungen (A.28), bestehend aus den Faktoren $(C(\hat{q})_k)$, welches nach den Fourier-Koeffizienten (\hat{u}_k) der Harmonischen gelöst werden kann.

$$\begin{aligned} C_0 : \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\hat{u}_0 \hat{u}_0 + \hat{u}_2 \hat{u}_2 + \hat{u}_1 \hat{u}_1) &= 0 \\ C_1 : i\omega \hat{u}_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (2\hat{u}_2 \hat{u}_1 + 2\hat{u}_0 \hat{u}_1) &= 0 \\ C_2 : i2\omega \hat{u}_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (2\hat{u}_0 \hat{u}_2 + 2\hat{u}_1 \hat{u}_1) &= 0 \\ C_3 : \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\hat{u}_1 \hat{u}_2) &= 0 \\ C_4 : \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\hat{u}_2 \hat{u}_2) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Es bleibt zu vermerken, dass das gezeigte Vorgehen nicht dem Harmonic Balance Verfahren, welches im Bezug auf die Navier-Stokes Gleichungen (siehe Abs. 2.5.2) besprochen wird, entspricht. Insbesondere die Behandlung des Residuums unterscheidet sich. Da allerdings Überschneidungen vorliegen, hat der detaillierte Einblick in Harmonic Balance seine Berechtigung. Außerdem ist anhand des gezeigten Gleichungssystems (A.28) die Kopplung der Gleichungen untereinander dargestellt und die Entstehung von Harmonischen, die außerhalb des ursprünglichen Sets liegen.

D. Numerisches Setup des Zylinders, $Re = 100$

Initialisierung der stationären Vorrechnung

Tab. A.1.: Zustände im Strömungsfeld zu Beginn einer Simulation des Zylinders bei $Re = 100$

ρ in $[\text{kg}/\text{m}^3]$	u in $[\text{m}/\text{s}]$	v in $[\text{m}/\text{s}]$	w in $[\text{m}/\text{s}]$	p in $[\text{Pa}]$
1,225	73,22	0	0	101325

Fernfeldrandbedingungen

Tab. A.2.: Fernfeldrandbedingung der Simulationen des Zylinders

$p_{t,\infty}$ in $[\text{Pa}]$	$T_{t,\infty}$ in $[\text{K}]$	Ma_∞ in $[-]$	T_u in $[-]$	L_T in $[\text{m}]$	$\alpha = \beta$ in $[\circ]$
104647	290,818	0,215	0	0	0

Gasmodell

- Ideales Gas: $\kappa = 1,4$ und $R = 287,06$
- Sutherland-Modell: $C = 110\text{K}$, $T_0 = 273\text{K}$, $\mu_0 = 1,7198 \cdot 10^{-5}\text{Pa s}$
- Wärmeleitfähigkeit: $Pr = 0,72$

Turbulenzbehandlung

- keine

Räumliche Diskretisierung

- Entropiefix: 0,075
- MUSCL-Fromm: 2. Ordnung
- Limiter: Van Albada Square

Zeitbereichssimulation

- Verfahren: Implicit Runge-Kutta, 3. Ordnung
- Lösungsverfahren: PredictorCorrector, $CFL = 50$, Subiterationen pro Zeitschritt¹ : 200
- $f = 603504\text{Hz}$, Zeitschritte pro Periode: 128, max. Zeitschritte: 20480, Start²: 5000

¹über Kriterium für L_1 -Residuum geregelt: 10^{-6} ²aufgrund stationärer Vorechnung

Frequenzbereichssimulation

- Fundamentalfrequenz: 594702Hz und harmonisches Set: $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$
- Abtastpunkte für höchste Harmonische: 5
- $CFL = 10$ und Löschschritte = 15000

E. Phasenwinkel bei der empirischen Fundamentalfrequenz

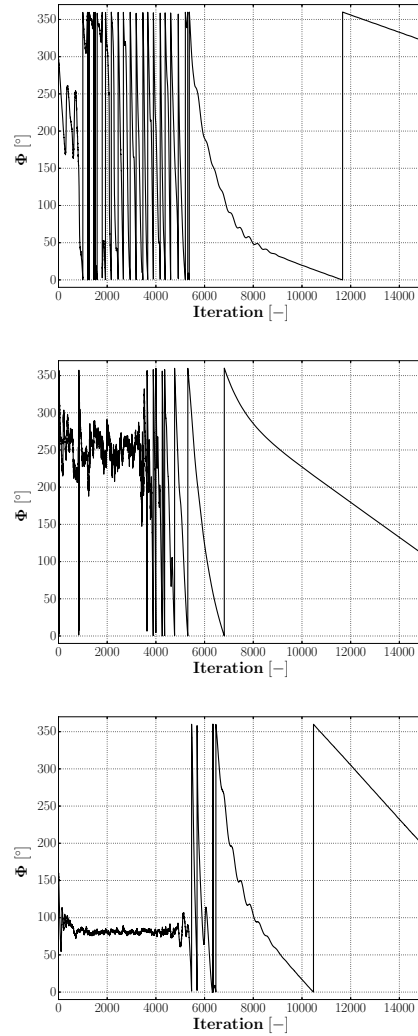


Abb. A.4.: Verlauf des Phasenwinkels des Fourier-Koeffizienten der Dichte für die 1. Harmonische (oben), die 2. Harmonische (mitte) und die 3. Harmonische (unten).

F. Konvergenzverläufe bei erhöhter Unsicherheit

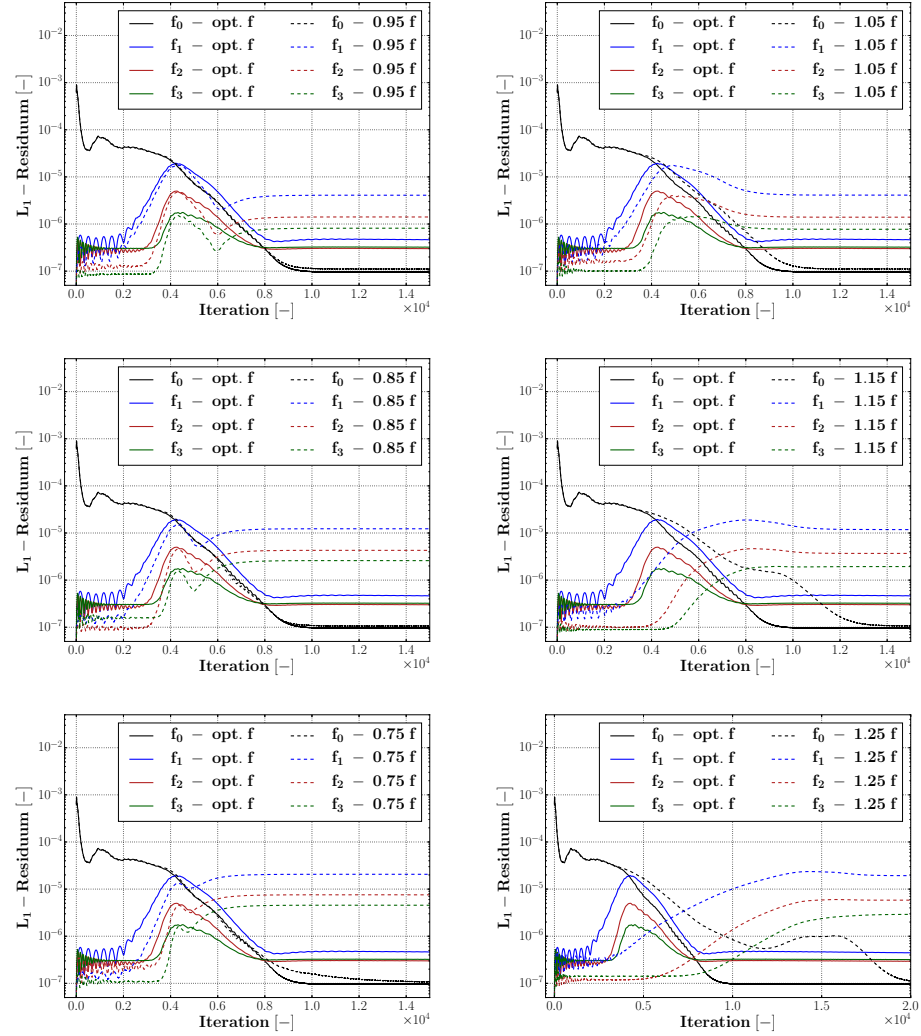


Abb. A.5.: Konvergenzverlauf der Harmonischen bei Harmonic Balance für eine optimale Fundamentalfrequenz und verschiedene Unsicherheiten in dieser Frequenz. Für eine Abweichung von 25% sei auf einen erweiterten Bereich der Abszisse aufmerksam gemacht.

G. Numerisches Setup der tiefen Kavität bei $Ma = 0,14$

Rechennetz

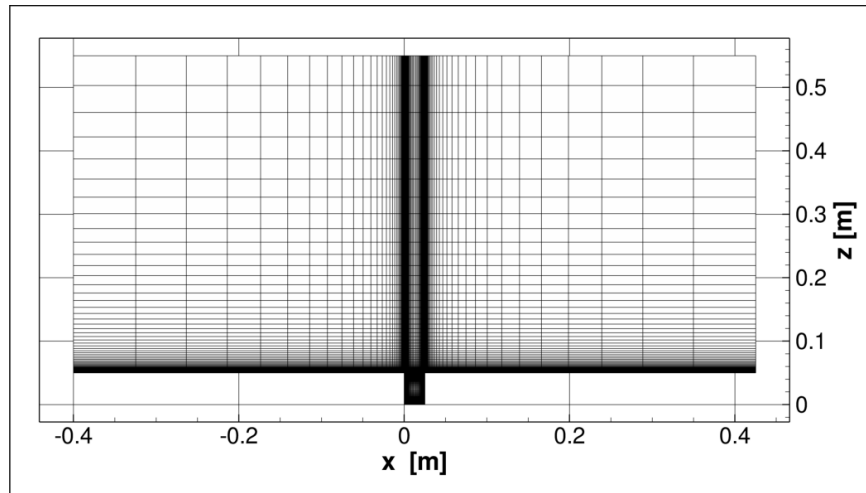


Abb. A.6.: Vernetzung der Kavität mit $L/T = 0,5$.

Initialisierung - Ebene Platte und Kavität

Tab. A.3.: Zustände im Strömungsfeld zu Beginn einer Simulation der Kavität mit $L/T = 0,5$ und bei $Ma = 0,14$

ρ in $[\text{kg}/\text{m}^3]$	u in $[\text{m}/\text{s}]$	v in $[\text{m}/\text{s}]$	w in $[\text{m}/\text{s}]$	p in $[\text{Pa}]$
1,225	48,4	0	0	101325

Einströmrand - Ebene Platte

Tab. A.4.: Parameter der Einströmrandbedingung

p_t in $[\text{Pa}]$	T_t in $[\text{K}]$	α in $[\text{°}]$	β in $[\text{°}]$	T_u in $[-]$	L_T in $[\text{m}]$
102771,7	289,3	0	0	0,0004	$4 \cdot 10^{-6}$

Ausströmrand - Ebene Platte

- $p = 101325\text{Pa}$

Einströmrund - Tiefe Kavität

- Strömungsprofil aus Simulation der ebenen Platte über eine viskose Lauflänge von 0,76m

Ausströmrund - Tiefe Kavität

- $p = 101325\text{Pa}$

Fernfeldrandbedingungen

Tab. A.5.: Fernfeldrandbedingung der Simulationen des Zylinders

$p_{t,\infty}$ in [Pa]	$T_{t,\infty}$ in [K]	Ma_∞ in [-]	T_u in [-]	L_T in [m]	$\alpha = \beta$ in [°]
102760	289,31	0,142	0	0	0

Gasmodell

- Ideales Gas: $\kappa = 1,4$ und $R = 287,06$
- Sutherland-Modell: $C = 110\text{K}$, $T_0 = 273\text{K}$, $\mu_0 = 1,7198 \cdot 10^{-5}\text{Pa s}$
- Wärmeleitfähigkeit: $Pr = 0,72$

Turbulenzbehandlung

- URANS: Menter-SST-Modell, $Pr^t = 0,9$

Räumliche Diskretisierung

- Entropiefix: 0,075
- MUSCL-Fromm: 2. Ordnung
- Limiter: Van Albada Square

Zeitbereichssimulation

- Verfahren: BDF-2
- Lösungsverfahren: PredictorCorrector, $CFL = 100$, Subiterationen pro Zeitschritt: 30
- $f = 1227\text{Hz}$, Zeitschritte pro Periode: 128, max. Zeitschritte: 4000

H. Numerisches Setup der flachen Kavität bei $Ma = 0,26$

Rechennetz

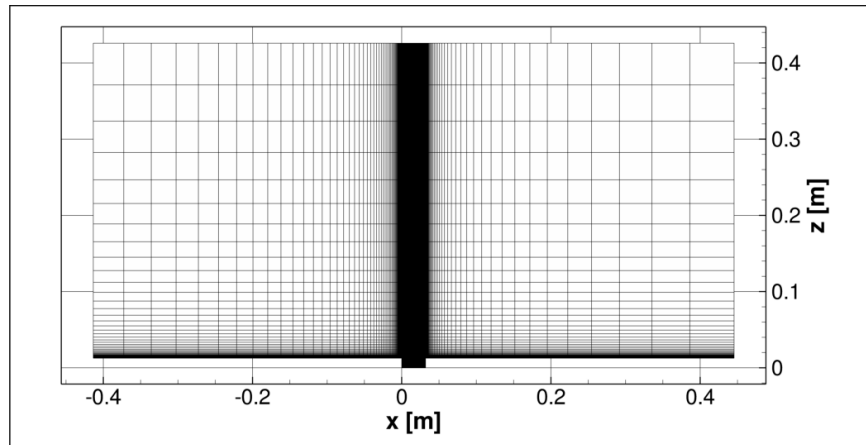


Abb. A.7.: Rechennetz der flachen Kavität

Initialisierung

Tab. A.6.: Zustände im Strömungsfeld zu Beginn einer Simulation der Kavität bei $Ma = 0,26$

ρ in $[\text{kg}/\text{m}^3]$	u in $[\text{m}/\text{s}]$	v in $[\text{m}/\text{s}]$	w in $[\text{m}/\text{s}]$	p in $[\text{Pa}]$
1,225	89,23	0	0	101325

Einströmrand

Tab. A.7.: Parameter der Einströmrandbedingung

p_t in $[\text{Pa}]$	T_t in $[\text{K}]$	α in $[\text{°}]$	β in $[\text{°}]$	T_u in $[-]$	L_T in $[\text{m}]$
106201,3	292,1	0	0	0,0001	$4 \cdot 10^{-6}$

Ausströmrand

- $p = 101300\text{Pa}$

Gasmodell

- Ideales Gas: $\kappa = 1,4$ und $R = 287,06$
- Sutherland-Modell: $C = 110\text{K}$, $T_0 = 273\text{K}$, $\mu_0 = 1,7198 \cdot 10^{-5}\text{Pa s}$
- Wärmeleitfähigkeit: $Pr = 0,72$

Turbulenzbehandlung

- URANS: k - ω -Modell, $Pr^t = 0,9$

Räumliche Diskretisierung

- Entropiefix: 0,075
- MUSCL: 3. Ordnung
- Limiter: keiner

Zeitbereichssimulation

- Verfahren: Implicit Runge Kutta, 3. Ordnung
- Lösungsverfahren: PredictorCorrector, $CFL = 5$, Subiterationen pro Zeitschritt³: 50
- $f = 1280\text{Hz}$, Zeitschritte pro Periode: 1024, max. Zeitschritte: 20000

Frequenzbereichssimulation

- Fundamentalfrequenz: 1403Hz und harmonisches Set: $\{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4\}$
- Abtastpunkte für höchste Harmonische: 5
- $CFL = 5$ und Löschschritte = 50000

³über Kriterium für L_1 -Residuum geregelt: 10^{-6}